Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 3

1. Zur Bedeutung der Binomialkoeffizienten:

   (a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Möglichkeiten, k aus n Objekten auszuwählen, gleich
   $$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots\ \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k!}$$
   und damit gleich dem Binomialkoeffizienten $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ ist! (Es ist dies beispielsweise die Zahl der Möglichkeiten, aus n Studierenden ein k-köpfiges Gremium zu wählen oder die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Wichtig ist, dass es auf die Reihenfolge der ausgewählten Objekte nicht ankommt. Man spricht auch von der *Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung* – wie Sie wahrscheinlich aus dem Mathematikunterricht wissen!)

   > Tipp: Der Zähler des obigen Ausdrucks ist gleich der Zahl der Möglichkeiten, k aus n Objekten in einer bestimmten Reihenfolge auszuwählen (also ein erstes, dann ein zweites, usw.). Der Nenner $k!$ gibt die Zahl der unterschiedlichen Möglichkeiten an, k Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.

   (b) Erklären Sie, warum gerade diese kombinatorische Größe im Binomischen Satz vorkommt! Was hat das Ausmultiplizieren eines Ausdrucks der Form $(a+b)^n$ mit einem Auswahlprozess zu tun?

2. Beweisen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist! (Tipp: Überlegen Sie, wie die rationalen Zahlen in Form einer unendlichen Liste angeordnet werden können!)

3. Sei $z = \frac{1}{3+4i} \in \mathbb{C}$.

   (a) Geben Sie die kartesischen Koordinaten (Real- und Imaginärteil) von z an!

   (b) Geben Sie die Polarkoordinaten von z an!

   (c) Skizzieren Sie $3+4i$ und z als Punkte in der komplexen Zahlenebene!

4. Beweisen Sie für $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ und geben Sie eine geometrische Deutung in der komplexen Zahlenebene:

   (a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

   (b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

   (c) $\overline{\overline{z}} = z$

5. Geben Sie die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ über $\mathbb{C}$ in kartesischer Form (d.h. in der Form $x + iy$) an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene!

6. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{3}{n+1}$ auf Beschränktheit und Monotonie!

7. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n = 3n + \frac{2}{n}(-1)^n$ auf Beschränktheit und Monotonie!

8. Die durch

   $$a_0 = 100$$
   $$a_1 = 1.4\, a_0$$
   $$a_{n+2} = 1.4\, a_{n+1} - 0.001\, a_n^2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

   definierte Folge beschreibt die Entwicklung einer Population, die „über ihre Verhältnisse lebt“, die Konsequenzen ihres Tuns aber erst mit einer zeitlichen Verzögerung spürt. (Wäre der Summand $-0.001\, a_n^2$ nicht vorhanden, so würde sie sich expotentiell vermehren). Berechnen Sie die Folgenglieder für $0 \leq n \leq 30$ und skizzieren Sie die Entwicklung als Punktgraph mit einem Computerwerkzeug Ihrer Wahl! Erklären Sie, wie der Term $-0.001\, a_n^2$ zum beobachteten Verhalten führt!