Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Übungstermin 2

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

   Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

2. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(4k-1)^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(4k+3)^2$

3. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$

4. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die **Bernoullische Ungleichung**:

   $(1+x)^n \;\geq\; 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > -1$,
   und die Ungleichung gilt mit $>$, wenn $n > 1$ und $x \neq 0$.

5. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Beweisen Sie:

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \;\geq\; 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j$$

6. Wie kann $|a-b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$ auf der Zahlengeraden geometrisch interpretiert werden? Zeigen Sie, dass für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

   (a) $|a-b| = 0 \iff a = b$

   (b) $|a-b| = |b-a|$

   (c) $|a-c| \;\leq\; |a-b| + |b-c|$ (Hinweis: Verwenden Sie die Dreiecksungleichung!)
   Drücken Sie diesen Sachverhalt in Worten aus!

7. Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x^2 - 1|$$