Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Weitere Aufgaben zum Lernen und Üben

Offene Aufgaben

1. Berechnen Sie $\left(\dfrac{1}{x}\right)'$ direkt mit Hilfe der Definition der Ableitung (Grenzwert des Differenzenquotienten)!

2. Verwenden Sie die Identität $\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)=x-x_0$, um die Ableitung der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ an einer Stelle $x_0>0$ (direkt mit Hilfe der Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten) zu berechnen!

3. Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\dfrac{d}{du}\operatorname{acos}\left(a\cos(u)\right)$! Hinweis: $\operatorname{acos}'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Untersuchen Sie die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(x)=x\sqrt{1+x^2}-\operatorname{asinh}(x)$ auf (strenge) Monotonie! (Hinweis: $\operatorname{asinh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$).

5. Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x\sin^2(x)}$

6. Geben Sie eine untere und eine obere Schranke für das Integral $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ an!

7. Seien $C,\lambda>0$. Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $X : t \mapsto C\,e^{-\lambda t}$ im Intervall $\left[0,\frac{\ln(2)}{\lambda}\right]$!

8. Berechnen Sie: $\displaystyle\frac{d}{dz}\int_{z}^{1}\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+2}\right)\,ds$

9. Sei $a > 0$. Argumentieren Sie, *ohne* eine Integration auszuführen, dass $\int\limits_0^a x\,dx$ gleich $\frac{a^2}{2}$ ist!

10. Berechnen Sie $\displaystyle\int s^3 e^{s^2}\,ds$.

11. Berechnen Sie: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

12. Zeigen Sie durch Angabe einer konvergierenden Majorante, dass das Integral $\int\limits_1^\infty (x^2 + 2\sqrt{x})^{-1}\,dx$ konvergiert!

13. Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$.
    (a) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f vom Grad 2 um den Entwicklungspunkt 0!
    (b) Schätzen Sie mit Hilfe des Restglieds den Fehler ab, der bei einer Approximation von $\sqrt{2}$ durch das in (a) berechnete Taylorpolynom gemacht wird!

14. Ermitteln Sie die Taylorreihe der Funktion $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu(x) = x^2 e^x$ um den Entwicklungspunkt 0! (Sie dürfen dabei die Taylorreihe der Exponentialfunktion als bekannt voraussetzen!)

15. Sei $z = -3\,e^{i\pi/4}$.
    (a) Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$!
    (b) Geben Sie z, $\overline{z}$, $\frac{1}{z}$ und z^2 jeweils in Polardarstellung und in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an!

16. Geben Sie (wahlweise in kartesischen Koordinaten oder in Polardarstellung) eine komplexe Zahl an, deren vierte Potenz gleich $16\,e^{-2i\pi/3}$ ist!

17. Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 27$ in Polardarstellung an! Skizzieren Sie die Lage dieser Lösungen in der komplexen Ebene!

18. Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3\ln(x)$!

19. Ermitteln Sie alle Wendestellen der Funktion $q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^3 \ln(x)$!

20. Zeigen Sie mit Hilfe des *Majorantenkriteriums für Reihen* (d.h. mit Hilfe einer geeigneten Vergleichsreihe, deren Konvergenz bekannt ist), dass die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 + 2\nu + 5}$ konvergiert!

21. Zeigen Sie mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu!}}$ konvergiert!

22. Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{3^\nu}$!

Multiple-Choice-Aufgaben

Bei diesen Aufgaben sind die richtigen Antworten mit „R“ und die falschen Antworten mit „F“ gekennzeichet.

1. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x ist definiert durch
   [Typ 1 aus 4]

   F $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x - h}$.

   R $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

   F $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x) - f(h)}{x - h}$.

   F $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x) - f(h)}{h}$.

2. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus: Welche der angegebenen Formeln stimmt?
   [Typ 1 aus 4]

   F $\ln'(x) = \ln(x)$.

   F $\ln'(x) = x\ln(x) - x$.

   F $\ln'(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

   R $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. Die Kettenregel lautet
   [Typ 1 aus 4]

F $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, g'(x)$

F $(g \circ f)'(x) = g'(x)\, f'(x)$

R $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$

F $(g \circ f)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

4. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $x_0 \in (a, b)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
   [Typ x aus 4]

   F $f'(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_0$ ist lokale Extremstelle

   R x_0 ist lokale Extremstelle $\;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$

   F x_0 ist lokale Extremstelle $\;\Leftrightarrow\; f'(x_0) = 0$

   F Keine der obigen Aussagen ist wahr.

5. In welchen der folgenden Rechnungen wurde die Regel von de l'Hospital korrekt angewandt?
   [Typ x aus 4]

   R $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x + x^2}{2x - x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 + 2x}{2 - 3x^2} = \dfrac{3}{2}$

   F $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + 7x + x^2}{5 + 3x - x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7 + 2x}{3 - 4x^3} = \dfrac{7}{3}$

   R $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

   R $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2 - x}{3x^2 + x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x - 1}{6x + 1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

6. Für jede stetig differenzierbare Funktion f gilt
   [Typ 1 aus 4]

   F $\int\limits_a^b f'(x)\, dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

   R $\int\limits_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$.

   F $\int\limits_a^b f'(x)\, dx = f'(b) - f'(a)$.

   F $\int\limits_a^b f'(x)\, dx = f(x)$.

7. Welche der angegebenen Funktionen ist eine Stammfunktion der auf das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ eingeschränkten Tangensfunktion $x \mapsto \tan(x)$?
   [Typ 1 aus 4]

   F $\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

   F $\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

   F $-\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

   R $-\ln(\cos(x))$.

8. $\displaystyle\int \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi =$
   [Typ 1 aus 4]

   F $f(\xi) + c$.

   R $\ln|f(\xi)| + c$.

   F $\dfrac{1}{f(\xi)} + c$.

   F $\dfrac{1}{f(\xi)^2} + c$.

9. Das Taylorpolynom von f vom Grad n um den Entwicklungspunkt x_0 ist gegeben durch den Term
   [Typ x aus 4]

   F $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$.

   R $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu$.

   F $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu}(x - x_0)^\nu$.

   R $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} f^{(\nu)}(x_0)\frac{(x - x_0)^\nu}{\nu!}$.

10. Die komplexe Zahl $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ erfüllt
    [Typ 1 aus 4]

F $z^3 = 1$

R $z^3 = -1$

F $z^3 = i$

F $z^3 = -i$

11. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für jede Stelle $x_0 \in (a, b)$:
[Typ x aus 4]

R x_0 ist Wendestelle von $f \Leftrightarrow x_0$ ist lokale Extremstelle von f'.

R x_0 ist Sattelstelle von $f \Rightarrow x_0$ ist lokale Extremstelle von f'.

R x_0 ist gleichzeitig lokale Extremstelle und Nullstelle von $f' \Leftrightarrow x_0$ ist Sattelstelle von f.

F x_0 ist lokale Extremstelle von $f \Leftrightarrow x_0$ ist Nullstelle von f'.

12. Welche der folgenden Reihen konvergieren? (Mit ein bisschen Wissen über Reihen ergeben sich die Antworten ohne Rechnung.)
[Typ x aus 4]

R $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4}{\nu^4}$

R $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^3 + 1}$

F $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{1+\nu}$

R $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\nu)}{\nu^2}$

13. Der Konvergenzradius der Taylorreihe der Funktion f um den Punkt x_0 sei gleich ρ. Der Konvergenzradius der Taylorreihe der Funktion f^2 um den Punkt x_0 sei gleich σ. Dann
[Typ 1 aus 4]

R ist $\sigma = \rho$.

F ist $\sigma < \rho$.

F ist $\sigma > \rho$.

F kann σ kleiner, gleich oder größer als ρ sein.