Universität Wien, WS 2014/15

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen I

Aufgaben zum Lernen und Üben

Offene Aufgaben

1. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2+1) - 2\sum_{k=1}^{n+2}(k^2-1)\,.$

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$

3. Zeigen Sie unter Ausnutzung der Dreiecksungleichung, dass für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:
$|\,a+b\,| + |\,b+c\,| \leq |\,a\,| + 2\,|\,b\,| + |\,c\,|$.

4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $x \mapsto |\sin(x)|$ im Intervall $[\,0, 2\pi]\,$!

5. Sei $z = \dfrac{1}{1+i} \in \mathbb{C}$.
   (a) Geben Sie Real- und Imaginärteil von z an!
   (b) Ermitteln Sie die Polarkoordinaten r und φ von $z\,$!

6. Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 6z + 13 = 0$ über $\mathbb{C}\,$!

7. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2+4}$ auf Beschränktheit und Monotonie!

8. Zeigen Sie, dass die durch $a_n = \dfrac{2n-3}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge gegen 2 konvergiert, indem Sie für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index n_ε angeben mit der folgenden Eigenschaft:

   Für alle Indizes $n > n_\varepsilon$ gilt $|a_n - 2| < \varepsilon$.

9. Beweisen Sie, dass der Durchschnitt zweier offener Mengen offen ist!
(Zur Erinnerung: $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt offene Menge, wenn es für jedes $x \in A$ ein offenes Intervall D gibt, so dass $x \in D$ und $D \subseteq A$).

10. Sei $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n+1}\}$.

    (a) Geben Sie eine untere und eine obere Schranke der Menge A an!
    (b) Besitzt A ein kleinstes Element? Falls ja, geben Sie es an!
    (c) Besitzt A ein größtes Element? Falls ja, geben Sie es an!
    (d) Bestimmen Sie $\inf(A)$ und $\sup(A)$!

11. Untersuchen Sie die Funktion $w : [0,1) \to [1,\infty)$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität!

12. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ auf Beschränktheit! Falls untere/obere Schranken existieren, geben Sie welche an! Anderenfalls zeigen Sie, dass keine untere/obere Schranke existiert!

13. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3}{x}$! Vergessen Sie nicht, Definitions- und Zielmenge von f^{-1} anzugeben!

14. Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3+x}$!

15. Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - \cos(x)\sqrt{x}}{5x^2-7}$!

Multiple-Choice-Aufgaben

Bei diesen Aufgaben sind die richtigen Antworten mit „R“ und die falschen Antworten mit „F“ gekennzeichet.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=0}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n-1} k =$
   [Nur eine Antwort ist richtig!]

   F $2n$
   R $2n+1$
   F $2n-1$
   F $n+1$

2. Die Dreiecksungleichung besagt
   [Nur eine Antwort ist richtig!]

   F Die Differenz der Beträge zweier Zahlen ist kleiner-gleich der Summe der Beträge der beiden Zahlen.

   F Die Summe der Beträge zweier Zahlen ist kleiner-gleich dem Betrag der Summe der beiden Zahlen.

   R Der Betrag der Summe zweier Zahlen ist kleiner-gleich der Summe der Beträge der beiden Zahlen.

   F Der Betrag der Differenz zweier Zahlen ist kleiner-gleich der Differenz der Beträge der beiden Zahlen.

3. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt
   [Mehrere Antworten können richtig sein!]

   F $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|}$

   R $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

   F $\frac{1}{|z|} = \frac{z}{\overline{z}^{\,2}}$

   F $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\sqrt{z^2 + \overline{z}^2}}$

4. Sei $K > 0$. Die durch $a_n = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{K}{n^2}}}$ definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist
   [Mehrere Antworten können richtig sein!]

   R monoton wachsend

   F monoton fallend

   R nach unten beschränkt

   F nach oben beschränkt

5. Welche der durch die angegebenen Bildungsgesetze definierten Folgen sind konvergent?
   [Mehrere Antworten können richtig sein!]

   R $a_n = \frac{5n^2 - 2}{3n^2 + n + 2} + \frac{2n + 5}{n + 4}$

   F $b_n = \frac{3n^2 + 2}{5n^2 + 3n + 1} + \frac{2n^2 + 3}{n + 2}$

F $c_n = \dfrac{4(-1)^n n^2 + 3n - 2}{3n^2 + 7}$

R $d_n = \dfrac{4n^2 + 3(-1)^n}{n^2 + 5}$

6. Es gilt folgendes Konvergenzkriterium für reelle Folgen:
   [Nur eine Antwort ist richtig!]

   F Jede beschränkte Folge ist konvergent.

   F Jede beschränkte Folge, die eine monoton wachsende Teilfolge enthält, ist konvergent.

   F Jede nach unten beschränkte, monoton wachsende Folge ist konvergent.

   R Jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge ist konvergent.

7. Von vier Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sind nur die angegebenen Eigenschaften bekannt. Welche der Folgen sind konvergent?
   [Mehrere Antworten können richtig sein!]

   R $|a_n| < 1$ für alle $n \geq 10$, und $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   F $a_n < 1$ und $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   R $a_n > 1$ und $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   F $|a_n - a_m| < 1$ für alle $m, n > 100$.

8. Das Supremum einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$
   [Mehrere Antworten können richtig sein!]

   F existiert immer.

   F ist die größte untere Schranke von A.

   F ist die kleinste untere Schranke von A.

   R ist die kleinste obere Schranke von A.

9. Die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ ist
   [Mehrere Antworten können richtig sein!]

   F injektiv.

   F surjektiv.

   F monoton (wachsend oder fallend).

   R beschränkt.

10. Welche der folgenden Argumente zeigen, dass die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, an jeder Stelle $x_0 \neq 0$ stetig ist?
[Mehrere Antworten können richtig sein!]

F Sei $x_0 \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Mit $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|x+x_0|}$ gilt: Ist $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, so folgt $|x^2 - {x_0}^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0|\,|x + x_0| < \varepsilon$.

R Für $x_0 \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ sei $\delta_\varepsilon = \min(\dfrac{\varepsilon}{8|x_0|}, 2|x_0|)$. Dann ${\delta_\varepsilon}^2 \leq 2|x_0|\delta_\varepsilon$ und $\delta_\varepsilon \leq \dfrac{\varepsilon}{8|x_0|}$. Aus $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ folgt $|x^2 - {x_0}^2| = |(x + x_0)(x - x_0)| = |x + x_0|\,|x - x_0| = |x - x_0 + 2x_0|\,|x - x_0| \leq (|x - x_0| + 2\,|x_0|)\,|x - x_0| \leq (\delta_\varepsilon + 2\,|x_0|)\,\delta_\varepsilon = {\delta_\varepsilon}^2 + 2\,|x_0|\,\delta_\varepsilon \leq 4\,|x_0|\,\delta_\varepsilon \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

F Sei $x_0 \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Mit $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ gilt: Ist $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, so folgt $|x^2 - {x_0}^2| < {\delta_\varepsilon}^2 = \varepsilon$.

F Sei $x_0 \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Weiters sei $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$. Für alle x mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ gilt dann $|x^2 - {x_0}^2| < \varepsilon^2 = \delta_\varepsilon$.

11. Welche der folgenden Argumente zeigen, dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 stetig ist?
[Mehrere Antworten können richtig sein!]

R Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ gilt: Ist $|x| < \delta_\varepsilon$, so folgt trivialerweise $|x| < \varepsilon$.

R $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$

R Da die Wurzelfunktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ in $[0, \infty)$ stetig ist und die Funktion $q : x \mapsto x^2$ überall stetig ist, ist auch die Funktion $w \circ q$, die mit der Betragsfunktion übereinstimmt, überall stetig, und daher auch an der Stelle 0.

F Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ für jede monoton wachsende Folge mit 0 als obere Schranke und für jede monoton fallende Folge mit 0 als untere Schranke.