Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 9

1. Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} dy\, \sin(3x-y) \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\pi/2} dy \int_0^\pi dx\, \sin(3x-y)$$

   getrennt, um zu verifizieren, dass sie gleich sind!

2. Sei A das Rechteck $[0,1] \times [1,2] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_A x_2\, e^{x_1 x_2}\, d(x_1, x_2)$.

3. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie $\displaystyle\int_B x^2\, y\, d(x,y)$

   (a) in kartesischen Koordinaten (zuerst Integral über y von 0 bis $\sqrt{1-x^2}$, danach Integral über x von -1 bis 1; machen Sie auch eine Skizze dazu),

   (b) in Polarkoordinaten.

4. Der Massenmittelpunkt X eines Körpers, der den Raumbereich $V \subset \mathbb{R}^3$ homogen ausfüllt, ist durch

$$X_j = \frac{\int_V x_j\, d^3x}{\int_V d^3x} \qquad j = 1, 2, 3$$

   definiert. (d^3x ist die Kurzschreibweise für $d(x_1, x_2, x_3)$.) Wo befindet sich der Massenmittelpunkt einer Halbkugel?

5. Die Komponenten des Trägheitstensors eines starren Körpers mit Massendichte ρ bezüglich des Ursprungs sind gegeben durch

$$\Theta_{jk} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\|x\|^2\, \delta_{jk} - x_j x_k\right) \rho(x)\, d^3x.$$

   Berechnen Sie die Komponenten des Trägheitstensors eines homogenen Würfels der Masse M, der den Raumbereich $-\frac{L}{2} \leq x_j \leq \frac{L}{2}$ (für $j = 1, 2, 3$) ausfüllt!

   Tipp: Beginnen Sie damit, $\|x\|^2\, \delta_{jk} - x_j x_k$ als Matrix anzuschreiben! Überlegen Sie, welche Komponenten Θ_{jk} aus Symmetriegründen gleich sind und welche (ebenfalls aus Symmetriegründen) gleich 0 sind, damit Sie möglichst wenige Integrale berechnen müssen! (Wenn Sie es klug anstellen, müssen Sie dafür nur ein einziges Integral ausrechnen!)

6. Berechnen Sie die Komponenten des Trägheitstensors einer homogenen Kugel der Masse M bezüglich ihres Mittelpunkts!

   Tipp: Wenn Sie es klug anstellen, müssen Sie dafür nur ein einziges Integral ausrechnen!

7. Eine kontinuierliche elektrische Ladungsverteilung wird so modelliert[1]:

$$\rho(r,\theta) = C\,\cos(\theta)\,e^{-r/r_0} \qquad \text{(in Kugelkoordinaten)},$$

wobei C und r_0 positive Konstanten sind. Berechnen Sie $\int_{z\geq 0} \rho(x)\,d^3x$, $\int_{z\leq 0} \rho(x)\,d^3x$ und das elektrische Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^3} x\,\rho(x)\,d^3x.$$

Wie interpretieren Sie die drei Integrale und die durch sie beschriebene Situation in physikalischer Hinsicht?

[1] In dieser Aufgabe werden Schreibweisen verwendet, die in Physik-Texten gebräuchlich, aber genau genommen mathematisch nicht ganz korrekt sind. Beachten Sie insbesondere, dass das Symbol ρ für zwei verschiedene Funktionen verwendet wird, die die gleiche physikalische Größe bezüglich unterschiedlicher Koordinaten darstellen.