Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 7

1. Schreiben Sie als Kurven mit einer geeigneten Parameterdarstellung an:

   (a) Im $\mathbb{R}^2$ die Ellipse $4\,x^2 + 9\,y^2 = 1$, im Gegenuhrzeigersinn mit Anfangspunkt $=$ Endpunkt $= \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ durchlaufen.

   (b) Im $\mathbb{R}^2$ den Polygonzug von $(0,0)$ nach $(1,0)$ und weiter nach $(1,1)$.

   (c) Im $\mathbb{R}^3$ eine Linie auf der Einheitskugel, die spiralförmig vom Nordpol ausgeht, sich in vielen Windungen über die Nordhalbkugel auf den Äquator zubewegt, diesen überquert, sich auf der Südhalbkugel auf den Südpol zubewegt und schließlich in ihm endet (m.a.W.: eine Linie, die die Einheitskugel „umspinnt").

   Tipp: „Denken" Sie in Kugelkoordinaten!

   Bringen Sie einen Plot Ihrer Lösung von (c) mit! In *GeoGebra* können Sie den Plot einer mittels Parameterdarstellung gegebenen Kurve mit dem Befehl `Kurve`, in *Mathematica* mit den Befehlen `ParametricPlot` und `ParametricPlot3D` erzeugen.

2. Ein (punktförmig angenommenes) Fahrzeug fährt geradeaus, dann in eine Kurve und danach wieder geradeaus. Zur Zeit t befindet es sich am Ort $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Wie bekannt, ist $\dot{x}(t)$ die Momentangeschwindigkeit und $\ddot{x}(t)$ die Momentanbeschleunigung zur Zeit t. Die dritte Ableitung $\dddot{x}(t)$ heißt „Ruck" (englisch *jerk*). Warum? Wieso spielt diese Größe beim Straßen- und Schienenbau eine Rolle?

   Siehe dazu auch https://www.amazon.com/dp/B07KW7XFX1.

3. Stellen Sie eine Formel auf, mit der die Länge einer in Polarkoordinaten mit φ als Parameter in der Form $[\varphi_0, \varphi_1] \to \mathbb{R}^+$, $\varphi \mapsto r(\varphi)$ gegebenen Kurve berechnet werden kann!

4. Die *logarithmische Spirale* ist definiert durch die Parameterdarstellung

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \left(a\,e^{b\,t}\cos(t), a\,e^{b\,t}\sin(t)\right)$$

   mit vorgegebenen Konstanten a und b, die wir beide als positiv voraussetzen. Wie sieht sie aus? Kann man sie kurz und bündig in Polarkoordinaten (gemäß Aufgabe 3) anschreiben? (Wie müsste man dann mit dem Bereich der Winkelkoodinate φ umgehen?) Berechnen Sie die Länge der logarithmischen Spirale (i) im Parameterintervall $[0, 2\pi]$, (ii) im Parameterintervall $(-\infty, 0]$.

5. Für die in Aufgabe 4 betrachtete logarithmische Spirale mit $a = b = 1$ und Parameterintervall $[0, 2\pi]$ ermitteln Sie eine äquivalente Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist!

6. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal differenzierbare Kurve. Zeigen Sie: Die Vektoren $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ stehen genau dann für alle $t \in [a, b]$ aufeinander normal, wenn der Parameter t (bis auf möglicherweise eine additive Konstante) proportional zur Bogenlänge ist. Wenden Sie diesen Sachverhalt auf folgende Frage an: Wie muss die Bewegung eines Punktteilchens im Raum beschaffen sein, damit die Beschleunigung stets normal zur Bewegungsrichtung ist?

7. Die Gleichung $x - y = e^{x+y}$ beschreibt eine Linie in der Ebene. Man möchte sie gern plotten, aber die Gleichung kann weder nach x noch nach y durch eine geschlossene Formel aufgelöst werden. Charakterisieren Sie die Linie als Kurve mittels einer geeigneten Parameterdarstellung (in der nur geschlossene Formeln auftreten sollen, die man dann in *GeoGebra* oder *Mathematica* eingeben kann)!

   Probieren Sie zuerst ein bisschen, bevor Sie sich diesen Tipp ansehen:
   Setzen Sie $x + y$ als Parameter t an!

8. Zuletzt eine Aufgabe aus einem für die Newtonsche Physik besonders wichtigen Kontext, für die man aber ein bisschen Termrechnung betreiben muss: Bei der Lösung des Keplerproblems (Bewegung im Gravitationsfeld einer im Ursprung ruhenden Zentralmasse) ergibt sich als Bahnkurve in der xy-Ebene folgende, durch Polarkoordinaten beschriebene Linie:
$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi),$$
   wobei $p > 0$ und $\varepsilon \geq 0$ Konstanten sind. Zeigen Sie, dass es sich dabei für $0 \leq \varepsilon < 1$ um eine Ellipse handelt!

   Tipp: Drücken Sie die Gleichung durch x und y aus und bringen Sie sie durch geeignete Umformungen in die Gestalt $c_1(x - m)^2 + c_2\, y^2 = c_3$, wobei alle c_j positiv sind. Jede solche Gleichung beschreibt eine Ellipse mit Mittelpunkt $(m, 0)$.

   Anmerkung: Für $\varepsilon = 1$ ergibt sich eine Parabel, für $\varepsilon > 1$ ein Hyperbelast.