Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 6

1. Zwischen vier physikalischen Größen r, s, u und v bestehe der Zusammenhang

$$\begin{aligned} r^2 + \sin(\pi\, r\, s) &= u \\ r + \frac{3}{s} &= v\,. \end{aligned}$$

   Man möchte dieses Gleichungssystem gern „nach r und s auflösen“, d.h. r und s als Funktionen von u und v darstellen, aber das ist leider mit einer geschlossenen Formel nicht möglich. Immerhin gibt es eine Lösung: Für $(u, v) = (4, 3)$ erfüllt $(r, s) = (2, 3)$ das Gleichungssystem. (Überprüfen Sie das!) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über lokale Diffeomorphismen, dass es eine Umgebung A des Punktes $(4, 3)$ gibt, sodass das Gleichungssystem für jedes $(u, v) \in A$ genau eine Lösung (r, s) besitzt, und dass die dadurch definierte Funktion

$$(u, v) \mapsto (r(u, v), s(u, v))$$

   differenzierbar ist!

   Tipp: Wenn man mit derartigen Problemstellungen noch keine Erfahrung hat, besteht die Hauptschwierigkeit dieser Aufgabe darin, die im erwähnten Satz und seinem Beweis verwendeten Symbole f, x, x_0, y, U, V und W mit den hier auftretenden zu identifizieren. Die Anwendung des Satzes erfordert dann nur eine ganz einfache Berechnung.

2. Berechnen Sie die Hesse-Matrix der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 3 - x + y - 2y^2 - x\, y - y^3.$$

3. Untersuchen Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = 4 - x^2 + y + 2y^2 + y^3$$

   auf lokale Extrema und Sattelpunkte, indem Sie (i) die kritischen Punkte ermitteln, d.h. die Punkte, an denen der Gradient verschwindet, und (ii) die Hesse-Matrix an diesen Punkten berechnen und entsprechende Schlüsse ziehen!

4. Dasselbe wie in Aufgabe 3 mit der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x, y) = (x - 2)\, e^{x\, y}.$$

5. Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte zweimal stetig differenzierbare Funktion an, die im Punkt $(-3, 4)$ ein isoliertes Minimum annimmt und deren Hesse-Matrix an diesem Punkt gleich $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist!

6. Das Newtonsche Gravitationspotential des aus Erde und Mond bestehenden Systems ist (wenn beide näherungsweise als ruhende Punkte beschrieben werden) gegeben durch

$$\phi(x) = -\frac{GM_{\mathsf{Erde}}}{\|x\|} - \frac{GM_{\mathsf{Mond}}}{\|x-(d,0,0)\|} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0),(d,0,0)\},$$

wobei $d > 0$ angenommen werden kann. Die Gravitationskraft auf einen Satelliten der Masse m, der sich am Punkt x befindet, ist durch $-m \operatorname{grad} \phi(x)$ gegeben. Wo muss sich der Satellit befinden, damit die auf ihn wirkende Gravitationskraft gleich 0 ist? Besitzt ϕ an diesem Punkt (er heißt „abarischer Punkt") ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattel? Stellen Sie eine Vermutung an, was das Ergebnis für die Stabilität einer solchen Situation bedeutet! Da ϕ eine Funktion von drei Variablen ist, bringt man ihren Graphen nicht im $\mathbb{R}^3$ unter. Können Sie dennoch einen Plot erstellen, der das Verhalten von ϕ bestmöglich visualisiert?

Anmerkung: Das Verhältnis von Erdmasse zu Mondmasse beträgt ziemlich genau $81 : 1$.

7. Untersuchen Sie die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \psi(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$$

auf lokale Extrema! Wie unterscheiden sich die hier auftretenden lokalen Extrema von den im Buch behandelten? Wie unterscheidet sich die Hesse-Matrix an den kritischen Punkten von den im Buch behandelten Beispielen? Die Funktion ψ spielt im Standardmodell der Elementarteilchenphysik eine wichtige Rolle. Sie heißt *Higgs-Potential*, wird aber auch *Mexican hat potential* genannt. Warum?

Anmerkung: Analog zu Funktionen in einer Variable wird definiert: ψ nimmt im Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Minimum bzw. Maximum an, wenn es eine Umgebung U von p gibt, sodass $\psi(x) \leq \psi(p)$ für alle $x \in U$ bzw. $\psi(x) \geq \psi(p)$ für alle $x \in U$.

8. Welche Punkte der Parabel $y = x^2 - 1$ liegen dem Ursprung $(0,0)$ am nächsten? Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Arten:

   (a) Die Methode, die man in der Schule anwenden würde:
   Zielfunktion, zunächst in zwei Variablen: $f(x,y)$
   Nebenbedingung: $g(x,y) = 0$
   Man löst die Nebenbedingung nach einer Variable auf, setzt in $f(x,y)$ ein und erhält eine Zielfunktion in nur einer Variablen, die (nicht ganz korrekt) meist ebenfalls mit f bezeichnet wird.

   (b) Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren:
   Funktion in drei Variablen: $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$
   Man ermittelt die kritischen Punkte von F, ohne Nebenbedingung.

   Machen Sie auch eine Skizze der Situation!

   Tipp: Als Zielfunktion f verwendet man zweckmäßigerweise nicht den Abstand vom Ursprung, sondern dessen Quadrat.