Universität Wien, SS 2019

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 1

1. Ein wichtiger Teil des mathematischen „Werkzeugkastens“ sind die *Definitionen* der relevanten Begriffe und Konzepte, da man präzise wissen muss, wovon man spricht, wenn man beispielsweise mit Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit arbeitet. Oftmals lösen sich Aufgaben fast von selbst, wenn man die entsprechende Definition genau liest und auf den konkreten Fall anwendet.

   Nun die Aufgabe: Erstellen Sie ein Definitionen-Blatt: ein Blatt Papier, auf das Sie jene Definitionen aus *Analysis I* notieren, die Ihnen wichtig erscheinen! Dieses Definitionen-Blatt können Sie im Laufe des Semesters mit Definitionen aus *Analysis II* erweitern. Das wird Ihnen erleichtern, zu verstehen, wie mathematische Konzepte für Funktionen in *einer* Variable auf Funktionen in *mehreren* Variablen verallgemeinert werden.

   Sie können diese Aufgabe ankreuzen, wenn Sie Ihr Definitionen-Blatt in die Übung mitbringen und mindestens drei Definitionen ohne Unterlagen korrekt aufschreiben können.

2. Mit $x = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$ berechnen Sie $\|x\|$, $\|y\|$ und $\|x - y\|$! Welche geometrischen Bedeutungen können Sie diesen drei Zahlen zuschreiben?

3. Eine Aufgabe zum Konzept der „Nähe“ im $\mathbb{R}^3$:

   Für $p \in \mathbb{R}^3$ und $r > 0$ sei $U_r(p)$ definiert wie im Buch, Definition 9.1.3. Nun sei $p = (2, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $x = (2.1, -2.9, 0.9) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Gilt $x \in U_{0.2}(p)$ oder $x \notin U_{0.2}(p)$?

   (b) Gilt $x \in U_{0.1}(p)$ oder $x \notin U_{0.1}(p)$?

   (c) Für welche $r > 0$ gilt $x \in U_r(p)$, für welche $r > 0$ gilt $x \notin U_r(p)$?

   Drücken Sie diese drei Fragestellungen und ihre Antworten in Ihren eigenen Worten – möglichst ohne Formeln – aus!

4. Betrachten Sie die Folge $(x_k)_k$ mit $x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeichnen Sie die ersten Folgenglieder als Punkte in der Zeichenebene, um sich über ihr Verhalten zu orientieren!

   (b) Ist die Folge konvergent? Falls ja, berechnen Sie den Grenzwert! Falls nein, begründen Sie!

   (c) Besitzt die Folge konvergente Teilfolgen? Falls ja, wogegen konvergieren diese Teilfolgen?

5. Beweisen Sie: Eine Folge $(x_k)_k$ mit $x_k = (x_{1k}, x_{2k}) \in \mathbb{R}^2$ für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann gegen $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, wenn

$$\lim_{k\to\infty} x_{1k} = p_1$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = p_2$$

gilt.

Anmerkung dazu: Man kann also den Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^2$, sofern er existiert, „komponentenweise" berechnen:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} (x_{1k}, x_{2k}) = \Big(\lim_{k\to\infty} x_{1k}, \lim_{k\to\infty} x_{2k}\Big).$$

Ganz allgemein konvergiert eine Folge im $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn ihre n „Komponentenfolgen" konvergieren.

6. Betrachten Sie die Folge $(x_k)_k$ mit $x_k = \Big(1 - \dfrac{1}{k}, \dfrac{2k+1}{k+4}\Big)$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Berechnen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

   (b) Erstellen Sie eine Skizze dieser Situation! Sie soll die Lage einiger Folgenglieder und die Lage des Grenzwerts in der Zeichenebene zeigen!

Anmerkung zu (b): Wenn Sie eine wirklich schöne und genaue Skizze erstellen wollen, benutzen Sie dazu ein Computerwerkzeug! Um die ersten 30 Glieder zu zeichnen, geben Sie in *GeoGebra* ein:

```
Folge((1-1/k,(2k+1)/(k+4)),k,1,30)
```

Mit *Mathematica* erstellen Sie einen solchen Plot mit der Eingabe

```
ListPlot[Table[{1-1/k,(2k+1)/(k+4)},{k,1,30}]]
```

7. Zeigen Sie – ohne Rechnung, nur mit aussagekräftigen Skizzen –, dass die Menge

$$M_1 = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 0.01\}$$

offen, die Menge

$$M_2 = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 0.01\}$$

abgeschlossen und die Menge

$$M_3 = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0.01 \leq x^2 + y^2 < 0.04\}$$

weder offen noch abgeschlossen ist!

8. Schreiben Sie die abgeschlossenen Hüllen der in Aufgabe 7 angegebenen Mengen an und zeichnen Sie sie!

9. Für welche der Mengen M_j von Aufgabe 7 existiert eine Folge $(a_k)_k$ mit $a_k \in M_j$, die gegen ein $a \notin M_j$ konvergiert? Geben Sie – in den Fällen, in denen das möglich ist – eine solche Folge an!