Ergänzungsskriptum

zur Lehrveranstaltung

Analysis für PhysikerInnen II

SS 2015

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik | Fakultät für Physik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Ergänzungsskriptum ist knapper als das Ergänzungsskriptum zur *Analysis für PhysikerInnen I*. Es bezieht sich hauptsächlich auf Schreibweisen, die alternativ zu jenen des Lehrbuchs *Walter Strampp: Höhere Mathematik 2 – Analysis* (Kapiteln 8 – 10), eBook der Universitätsbibliothek unter http://ubdata.univie.ac.at/AC08983560, verwendet werden können.

Vektoren

Für Vektoren und Vektorfelder werden im Buch meist Symbole ohne besondere Kennzeichnung verwendet. An wenigen Stellen werden Vektoren mit **Vektorpfeilchen** geschrieben, vor allem, wenn es sich um Einheitsvektoren (Symbol $\vec{e}$), um die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen ($\vec{e}_j$) oder um den Nullvektor ($\vec{0}$) handelt. Wer mag, kann auch über alle anderen Vektoren Vektorpfeilchen setzen, also etwa $\vec{x} = (x_1, x_2)$ statt $x = (x_1, x_2)$ für den Ortsvektor schreiben oder $\vec{V}(\vec{x})$ statt $V(x)$ für ein Vektorfeld. Wenn Sie im Buch etwa das Symbol $f(t)$ sehen, müssen Sie aus dem Zusammenhang erschließen, ob es sich um eine skalare Größe oder um eine Vektorgröße handelt! Ist zuvor $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ angegeben, so wissen Sie, dass $f(t)$ für jedes $t \in [a, b]$ ein dreidimensionaler Vektor (ein „3-Vektor") ist. Man könnte in diesem Fall genauso gut die Schreibweise $\vec{f}(t)$ verwenden.

Vektoren werden im Buch durch ihre Komponenten meist in **Zeilenform** ausgedrückt, also als $1 \times n$-Matrizen angesehen. (Lediglich im Rahmen der Parameterdarstellung von Kurven und Flächen gibt der Autor Vektoren in Spaltenform an). Ist etwa $x = (x_1, x_2)$, so entspricht die **Spaltenform** der zu x **transponierten Matrix**

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Auch die umgekehrte Version (Vektoren werden zunächst als Spalten angegeben, Zeilen sind deren Transponierte) ist in der Physik gebräuchlich.

Die Komponenten des Ortsvektors bzw. einer mehrdimensionalen Variablen werden im Buch mit **tiefgestellten Indizes** geschrieben, wie $x = (x_1, x_2)$, die Komponenten von Funktionen mit **hochgestellten Indizes**, wie $V(x) = (V^1(x), V^2(x))$. Daher Achtung: Wenn Sie an irgendeiner Stelle das Symbol f^2 sehen, müssen Sie aus dem Zusammenhang erschließen, ob damit „f Quadrat" oder „die zweite Komponente von f" gemeint ist!

Das **Skalarprodukt** von Vektoren wird im Buch manchmal mit einem Punkt ($\cdot$) gekennzeichnet, manchmal nicht. Beachten Sie, dass das Skalarprodukt auch als **Matrixprodukt** geschrieben werden kann: Sind u und v (Zeilen-)Vektoren, so ist

$$u \cdot v = u\, v^T.$$

Eine etwas schlampige Schreibweise hiervon (wie sie im Buch manchmal vorkommt) wäre $u\, v$.

Differentialoperatoren

Um die Operationen Gradient, Divergenz und Rotation anzuschreiben, wird in der Physik oft der „**Nabla-Operator**" verwendet, der im Buch leider gar nicht vorkommt. In drei Dimensionen ist damit der formale Ausdruck[1]

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

gemeint (in n Dimensionen ein analoger Ausdruck mit n partiellen Ableitungsoperatoren).

Der **Gradient** einer Funktion f wird dann in der Form

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f$$

geschrieben, die **Richtungsableitung** in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}$ in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} f,$$

die **Divergenz** eines Vektorfeldes $\vec{V}$ in der Form

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

(also mit einem formalen Skalarprodukt) und die **Rotation** eines Vektorfeldes $\vec{V}$ in der Form

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

(also mit einem formalen Vektorprodukt). Viele Identitäten, die für Vektoren gelten, gelten dann auch mit dem Nabla-Operator, etwa

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{V} \right) = 0$$

und

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0.$$

Der **Laplace-Operator** ist durch

$$\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

gegeben und wird daher oft einfach in der Form $\vec{\nabla}^2$ („Nabla Quadrat") geschrieben.

[1] Oft wird $\vec{\nabla}$ statt dessen in Spaltenform angeschrieben. Die obige Form ist an die Konvention des Buches angepasst, Vektoren als Zeilen anzusehen.

Integrale

Im Buch werden **Integrale** in der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

geschrieben. Eine alternative Schreibweise ist

$$\int_a^b dx\,f(x),$$

wobei

$$\int\limits_a^b dx$$

als „x-Integration über das Folgende“ verstanden wird, so wie $\dfrac{\partial}{\partial x}$ als „partielle Ableitung des Folgenden nach x“ zu lesen ist.

Der Vorteil dieser Schreibweise erweist sich insbesondere bei **Mehrfachintegralen**, d.h. bei *iterativer Integration*, wie es im Buch heißt. Dort wird ein Zweifachintegral etwa in der Form

$$\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2$$

angeschrieben. In der alternativen (in der Physik oft verwendeten) Schreibweise sieht das gleiche Integral so aus:

$$\int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} dx_1\,f(x_1,x_2).$$

In dieser Form ist leichter zu erkennen, welche Grenzen zu welcher Integrationsvariable gehören.

Ein **Flächenelement** wird im Buch in der Form $d(x_1,x_2)$ geschriebenen und als dx abgekürzt. Alternative Schreibweisen sind die Produktform $dx_1\,dx_2$ und die Kurzform d^2x. In drei Dimensionen kann für ein **Volumselement** $d(x_1,x_2,x_3)$, das im Buch ebenfalls als dx abgekürzt wird, die Produktform $dx_1\,dx_2\,dx_3$ oder die Kurzform d^3x benutzt werden. Die Bezeichnungen d^2x, d^3x (allgemein d^nx) haben gegenüber der einheitlichen Abkürzung dx den Vorteil, die Dimension anzuzeigen. Oft werden in der Physik auch eigene Buchstaben wie dS oder dA für ein Flächenelement und dV für ein Volumselement benutzt.

Für die in der Substitutionsregel für Mehrfachintegrale auftretende **Funktionaldeterminante** (**Jacobi-Determinante**) einer Funktion $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (oder einer Einschränkung auf eine kleineren Definitionsmenge), im Buch in der Form

$$\det\left(\frac{dg}{dx}(x)\right)$$

oder als

$$\det\left(\frac{dg}{d(x_1,\dots x_n)}(x_1,\dots x_n)\right)$$

geschrieben, wird auch oft die Schreibweise

$$\frac{\partial(g^1,\dots g^n)}{\partial(x_1,\dots x_n)}$$

benutzt. Damit gilt etwa für die Polarkoordinatenabbildung

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right| dr\,d\phi = r\,dr\,d\phi$$

und für die Kugelkoordinatenabbildung

$$dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)}\right| dr\,d\phi\,d\theta = r^2\,\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta.$$

Für die Form der **Integralsätze** von Gauß und Stokes in alternativer (und kompakterer) Schreibweise siehe *F.E.: Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik*, http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/grundlagen/.