Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 13

1. Gegeben ist eine Kugel mit Radius R und ein (einfacher) Kegel mit Öffnungswinkel α, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt. Berechnen Sie den Flächeninhalt jenes Teils der Kugeloberfläche, der innerhalb des Kegels liegt, mit Hilfe eines Flächenintegrals!

   Anmerkung: Lesen Sie im Buch auf S. 369 und S. 378 nach, wie die Sphäre mit Radius R beschrieben wird!

2. Eine glatte Fläche F im Raum besitzt (je nach der verwendeten Parametrisierung) zwei Einheitsnormalvektoren. Wird einer (n^0) gewählt, so bildet das Paar (F, n^0) eine *orientierte Fläche*. Der *Fluss* eines Vektorfelds V durch eine orientierte Fläche (F, n^0) ist definiert als das Flächenintegral

   $$\int_F V\, n^0\, dA\,,$$

   wobei $n^0\, dA$ *vektorielles Flächenelement* heißt. In physikalischen Texten wird $n^0\, dA$ oft mit $d\vec{A}$ bezeichnet und das obige Integral in der Form $\int_F \vec{V} \cdot d\vec{A}$ geschrieben, was seine geometrische Bedeutung unterstreicht.

   Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

   $$W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
   $$W(x) = \big(3\,x_1 + x_2, -x_1, -3\,x_3\big)$$

   durch die Einheitskreisscheibe der Ebene $x_3 = 1$ mit nach oben (d.h. in positive x_3-Richtung) weisendem Einheitsnormalvektor! Was bedeutet das Vorzeichen des Ergebnisses?

   Anmerkung: Der Begriff des Flusses eines Vektorfelds durch eine orientierte Fläche ist in der Physik sehr wichtig. Ist etwa V das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, so stellt er die Durchflussrate (das durch F fließende Flüssigkeitsvolumen pro Zeitintervall) dar. Andere Beispiele sind der elektrische Fluss und der im Induktionsgesetz auftretende magnetische Fluss.

3. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$E : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$$

$$E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$$

durch die Sphäre (Kugeloberfläche) S mit Mittelpunkt im Ursprung, Radius R und nach außen weisendem Einheitsnormalvektor! (Um die Berechnung möglichst einfach zu halten, drücken Sie zuerst den Einheitsnormalvektor durch den Ortsvektor x aus!) Wie hängt der Fluss von R ab? Wie interpretieren Sie das?

4. Dasselbe wie in Aufgabe 3, nun mit dem Vektorfeld

$$U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$U(x) = x$$

anstelle von E !

5. Die letzte Aufgabe ist zwei Begriffen gewidmet, die im Buch (und in der Vorlesung) erst nach dem Abschnitt über Flächenintegrale behandelt werden: Für ein differenzierbares Vektorfeld $V : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird die *Divergenz* durch

$$\operatorname{div} V(x) = \frac{\partial V^1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial V^2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial V^3}{\partial x_3}(x)$$

(sie ist ein Skalarfeld) und die *Rotation* durch

$$\operatorname{rot} V(x) = \left(\frac{\partial V^3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial V^2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial V^1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial V^3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V^2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial V^1}{\partial x_2}(x) \right)$$

(sie ist ein Vektorfeld) definiert. Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation

(a) des Vektorfelds W von Aufgabe 2,

(b) des Vektorfelds E von Aufgabe 3

(c) und des Vektorfelds U von Aufgabe 4!

Anmerkung: Die Divergenz gibt die *Quellstärke* eines Vektorfeldes an, die Rotation seine *Wirbelstärke*.

Nachfrage: Das Vektorfeld E von Aufgabe 3 stellt (bis auf einen Vorfaktor) das von einer Punktladung erzeugte elektrische Feld dar. In Aufgabe 5(b) haben Sie seine Divergenz, also seine Quellstärke, berechnet. Stört Sie an Ihrem Ergebnis etwas? Wie interpretieren Sie es?