Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 12

1. Berechnen Sie die Bogenlänge der durch

$$\begin{aligned} &f : [0, \sqrt{5}] \to \mathbb{R}^2 \\ &f(t) = \big(t^2 \cos(t), t^2 \sin(t)\big) \end{aligned}$$

   dargestellten Kurve!

2. Überprüfen Sie durch explizites Nachrechnen, dass die Formel für die Bogenlänge einer Kurve für die beiden äquivalenten Parametrisierungen des im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreises

$$\begin{aligned} &g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big) \\ &h : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad h(t) = \big(\cos(2\,\pi\,t), \sin(2\,\pi\,t)\big) \end{aligned}$$

   das gleiche Ergebnis liefert!

3. Beweisen Sie: Stellt $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ dar, und ist $f'(t)$ für alle $t \in [a, b]$ ein Einheitsvektor, so ist der Parameter t gleich der Bogenlänge entlang der Kurve im folgenden Sinn: Für $a \le t_1 < t_2 \le b$ ist $t_2 - t_1$ die Bogenlänge des Kurvenstücks zwischen den Punkten mit Parameterwerten t_1 und t_2.

   Anmerkung: Das ist die Umkehrung des Satzes „Eigenschaften der Bogenlänge“ im Buch (Seite 359). Die Bogenlänge entlang einer Kurve zu finden ist also gleichbedeutend damit, eine Parametrisierung f zu finden, für die (für alle t) $||f'(t)|| = 1$ gilt.

4. Sei K die durch

$$f(t) = \big(2\,t, 2\,t^2 - 1, -t\big)$$

   dargestellte räumliche Kurve mit Anfangspunkt $(2, 1, -1)$ und Endpunkt $(4, 7, -2)$. (Ermitteln Sie das Parameterintervall selbst!) Sei weiters V das Vektorfeld

$$\begin{aligned} &V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &V(x) = \big(-x_2, x_1, {x_3}^2\big)\,. \end{aligned}$$

   Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_K V\,ds\,$!

5. Sei Γ der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis, und sei W das Vektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$W(x) = \big(- x_2, x_1 \big) \, .$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\Gamma W \, ds$! Machen Sie eine Skizze der Kurve und des Vektorfelds! Mit der Skizze und einer (ganz) kleinen Rechnung (ohne Integrieren!) können Sie Ihr Ergebnis erklären!

6. Sei Γ der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis, und sei U das Vektorfeld

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$U(x) = \big(x_1, x_2 \big) \, .$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\Gamma U \, ds$! Machen Sie eine Skizze der Kurve und des Vektorfelds, die Ihr Ergebnis erklärt!

7. Sei

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\Phi(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - x_3 \, ,$$

und sei γ die durch

$$f : [1, 4] \to \mathbb{R}^3$$
$$f(t) = \big(2 + t, 2 - t, t^2 \big)$$

dargestellte Kurve. Überprüfen Sie durch explizites Nachrechnen, dass das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{grad} \Phi \, ds$ gleich der Differenz

$$\Phi(\text{Endpunkt von } \gamma) - \Phi(\text{Anfangspunkt von } \gamma)$$

ist!

Anmerkung: Physikalisch kann das so interpretiert werden: Wird ein Körper entlang einer Kurve γ in einem Kraftfeld F bewegt, so ist damit eine Arbeit verbunden, die durch das Kurvenintegral $\int_\gamma F \, ds$ („Kraft mal Weg“, entlang der Kurve „aufsummiert“) gegeben ist. Ist F ein Potentialfeld, so ist dieses Kurvenintegral gleich der Differenz der potentiellen Energien zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve. (Bei dieser Formulierung ist ein Vorzeichen unter den Teppich gekehrt worden: Die Beziehung zwischen Kraft F und potentieller Energie Φ lautet in Wahrheit $F = -\operatorname{grad} \Phi$. Ist $\int_\gamma F \, ds$ negativ, so muss Arbeit am Körper verrichtet werden, um ihn – sozusagen *gegen* die Kraft – zu bewegen. Das machen Sie, wenn Sie einen Gegenstand heben. Ist $\int_\gamma F \, ds$ positiv, so verrichtet der Körper Arbeit.)