Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 11

1. Wie sieht die durch die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$f(t) = \big(t\,(t-1)^2, t\,(1-t)\big)$$

beschriebene Kurve aus? Ist sie geschlossen? Machen Sie eine Skizze! Einen Plot mit *Mathematica* erzielen Sie mit der Syntax

```
ParametricPlot[{t(t-1)^2,t(1-t)},{t,0,1}]
```

2. Jede der beiden folgenden Funktionen $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ stellt eine glatte geschlossene Kurve dar. Plotten Sie sie mit *Mathematica* und erklären Sie ihr Aussehen!

   (a) $g(t) = \big(\cos(t), \sin(t), \sin(5\,t)\big)$
   Tipp: Stellen Sie sich t als Zeit vor und $g(t)$ als Ort eines Teilchens zur Zeit t ! Wie sieht die Bewegung des Teilchens aus, wenn man sie „von oben" betrachtet? Was macht die z-Koordinate währenddessen?

   (b) $h(t) = \big(\sin(t)\cos(30\,t), \sin(t)\sin(30\,t), \cos(t)\big)$
   Tipp: Wie lauten die Kugelkoordinaten des Punktes $h(t)$? Sie sind einfach abzulesen: $r(t) = ?$, $\theta(t) = ?$, $\phi(t) = ?$

   Den Plot einer räumlichen Kurve erzielen Sie mit *Mathematica* so (hier anhand des Beispiels (a)):

```
ParametricPlot3D[{Cos[t],Sin[t],Sin[5t]},{t,0,2Pi}]
```

3. Der Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt $t \in [0,1]$ sei gleich $x(t) = \big(t, 4(t-t^2)\big)$. Berechnen Sie seinen Geschwindigkeitsvektor! Zu welchem Zeitpunkt bewegt sich das Teilchen am langsamsten? An welchem Ort ist es zu dieser Zeit? Machen Sie eine Skizze dieser Situation! (Zeichnen Sie die Kurve, wählen Sie einige ihrer Punkte, beschriften Sie diese mit den zugehörigen t-Werten und zeichnen sie die Geschwindigkeitsvektoren in diesen Punkten ein!)

   Nachfrage: Um welchen physikalischen Bewegungstyp handelt es sich, wenn Sie den $\mathbb{R}^2$, in dem die Bewegung stattfindet, als xz-Ebene des $\mathbb{R}^3$ auffassen? Wie interpretieren Sie den zeitlichen Verlauf der ersten Komponente des Geschwindigkeitsvektors?

4. Geben Sie zwei verschiedene, zueinander äquivalente Parameterdarstellungen der direkten Verbindungsstrecke von $x_{\mathsf{ini}} \in \mathbb{R}^3$ nach $x_{\mathsf{fin}} \in \mathbb{R}^3$ an (wobei x_{ini} und x_{fin} beliebig, aber verschieden sind)!

5. Die Funktion

   $$\begin{aligned} &f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ &f(t) = R\,\big(\cos(t), \sin(t)\big) \end{aligned}$$

   stellt einen Kreis mit Radius R dar.

   (a) Geben Sie eine zu f äquivalente Parameterisierung

   $$\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

   an!

   (b) Geben Sie eine zu f äquivalente Parameterisierung

   $$\hat{f} : [0, c] \to \mathbb{R}^2$$

   für ein passendes c an, für die $\hat{f}'$ ein Einheitsvektor ist!

6. Sei

   $$\begin{aligned} &f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \\ &f(t) = \big(t + \tfrac{1}{2}\,t^2, t - \tfrac{1}{2}t^2\,\big). \end{aligned}$$

   Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor (im Buch mit $f'^{\,0}$ bezeichnet)!