Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 10

1. Eine Aufgabe des vorigen Übungstermins hat gelautet:

   Auf einer kreisförmigen Scheibe, beschrieben durch

   $$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq R\},$$

   befinden sich elektrische Ladungen, deren Verteilung durch die Flächenladungsdichte

   $$\rho(x) = C\sqrt{R^2 - \|x\|^2} \qquad \text{für } \|x\| \leq R$$

   beschrieben werden. Berechnen Sie die Gesamtladung!

   Lösen Sie sie nun durch Verwendung ebener Polarkoordinaten! Beachten Sie, wie kurz und elegant die Rechnung jetzt ist!

2. Im $\mathbb{R}^2$ können statt (x_1, x_2) die Koordinaten (u_1, u_2) verwendet werden, wobei

   $$x_1 = u_1 - u_2$$
   $$x_2 = u_1 + u_2$$

   gilt.

   (a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der zugehörigen Abbildung:

   $$g : (u_1, u_2) \longmapsto (u_1 - u_2, u_1 + u_2)$$

   (b) Zeichnen Sie in einem x_1x_2-Diagramm die Menge D aller Punkte, für die

   $$-1 \leq u_1, u_2 \leq 1$$

   gilt!

   (c) Berechnen Sie $\int\limits_D d(x_1, x_2)$ unter Verwendung der Koordinaten (u_1, u_2)! Wie interpretieren Sie ihr Ergebnis? Hätten Sie es auch erhalten können, ohne ein Integral zu berechnen?

   Anmerkung: Solche Koordinaten finden in der Relativitätstheorie (in der eine der beiden Koordinaten x_1 und x_2 die Zeit bezeichnet) Verwendung. Dort werden sie „lichtartige Koordinaten" genannt.

3. Die Funktionaldeterminante kann heuristisch („intuitiv") verstanden werden. Am Beispiel ebener Polarkoordinaten: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2$ jener Punkt, dessen Polarkoordinaten r_0 und ϕ_0 sind (wobei wir $r_0 > 0$ voraussetzen), und sei D ein kleines („infinitesimal kleines") Flächenstück, bestehend aus allen Punkten, deren Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} &r_0 \le r \le r_0 + dr \\ &\phi_0 \le \phi \le \phi_0 + d\phi \end{aligned}$$

erfüllen. Sind dr und $d\phi$ sehr klein, so ist D näherungsweise ein (sehr kleines) Rechteck. Ist nun f die Funktionaldeterminante der Polarkoordinatenabbildung an der Stelle (r_0, ϕ_0), so ist der Flächeninhalt von D (in „infinitesimaler Näherung") durch $|f|\, dr\, d\phi$ gegeben. Benutzen Sie diesen Sachverhalt, um $|f|$ ohne Differentialrechnung (und nur mit Mitteln der Schulmathematik, insbesondere der elementaren Geometrie) zu berechnen! Machen Sie eine Skizze dieser Situation!

Anmerkung: Daher wird ein Integral in Polarkoordinaten über eine Funktion F auch oft in der Form

$$\int\limits_{\text{Gebiet in Polarkoordinaten}} F(r,\phi)\, r\, dr\, d\phi$$

angeschrieben und $r\, dr\, d\phi$ als „Flächenelement" (analog zu $dx_1\, dx_2$) bezeichnet.

4. Die Koordinaten des Massenmittelpunkts eines homogenen Körpers, der das Raumgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ausfüllt, sind durch

$$X_j = \frac{\int\limits_D x_j\, dx}{\int\limits_D dx} \qquad j = 1, 2, 3$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten des Massenmittelpunkts der durch

$$\begin{aligned} &{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \le R^2 \\ &x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

definierten (homogenen) Halbkugel unter Verwendung von Kugelkoordinaten! Machen Sie eine Skizze!

5. Für einen Körper, der das Raumgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ausfüllt, und dessen Massendichte durch die Funktion $\rho : D \to \mathbb{R}$ gegeben ist, ist das Trägheitsmoment bezüglich der x_3-Achse definiert durch

$$I = \int\limits_D \left({x_1}^2 + {x_2}^2\right) \rho(x)\, dx.$$

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders (mit Radius R, Höhe h und Masse M) bezüglich seiner Symmetrieachse! Verwenden Sie dabei Zylinderkoordinaten!

Anmerkung: Das Trägheitsmoment ist eine wichtige Größe bei der Beschreibung von Drehbewegungen: Rotiert ein starrer Körper mit Winkelgeschwindigkeit ω um eine fixe

Achse, so ist seine Rotationsenergie durch $\frac{1}{2}\,I\,\omega^2$ und die Drehimpulskomponente in Richtung der Rotationsachse durch $I\,\omega$ gegeben.

6. Aus einer Kugel mit Radius R wird durch einen (einfachen) Kegel mit Öffnungswinkel α, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, ein Sektor ausgeschnitten. Wie groß ist sein Volumen?