Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 9

1. Beschreiben Sie in Worten, wie der Graph der charakteristischen Funktion einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aussieht!

2. Leiten Sie die Volumsformel für einen geraden Kreiskegel mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri her!

3. Leiten Sie die Formel für die Kreisfläche mit Hilfe des Zweifachintegrals

$$\int\limits_{\text{Kreis}} d(x,y)$$

her! Sie können dabei benutzen, dass eine Stammfunktion von $\sqrt{a^2 - x^2}$ gleich $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ ist.

4. Die Koordinaten des Schwerpunkts („Massenmittelpunkts“) einer Fläche $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sind durch

$$X_j = \frac{\int\limits_D x_j\,dx}{\int\limits_D dx} \qquad j = 1,2$$

gegeben. Wo befindet sich der Schwerpunkt eines Halbkreises?

5. Sei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Zeichnen Sie D! Berechnen Sie:

   (a) $\mathrm{Vol}(D)$

   (b) $\int\limits_D \left({x_1}^2 - {x_2}^2\right) d(x_1, x_2)$. Wie erklären Sie Ihr Ergebnis?

   (c) $\int\limits_D \left({x_1}^2 + {x_2}^2\right) d(x_1, x_2)$

6. Auf einer kreisförmigen Scheibe, beschrieben durch

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq R\},$$

befinden sich elektrische Ladungen, deren Verteilung durch die Flächenladungsdichte

$$\rho(x) = C\sqrt{R^2 - \|x\|^2} \qquad \text{für } \|x\| \leq R$$

beschrieben werden. Berechnen Sie die Gesamtladung!

Tipp: Gehen Sie analog vor wie in Aufgabe 3! Benutzen Sie auch die dort angegebene Stammfunktion!