Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 8

1. Überprüfen Sie, dass

$$\int_{-3}^{3}\left(\int_{0}^{2}(x^2+y)\,dy\right)dx=\int_{0}^{2}\left(\int_{-3}^{3}(x^2+y)\,dx\right)dy$$

gilt, d.h. dass es auf die Reihenfolge der Integrationen nicht ankommt!

Anmerkung: Eine andere (in mancher Hinsicht praktischere) Schreibweise dieser Identität ist

$$\int_{-3}^{3}dx\int_{0}^{2}dy\,\left(x^2+y\right)=\int_{0}^{2}dy\int_{-3}^{3}dx\,\left(x^2+y\right).$$

2. Sei $I=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x_1\le 3,-1\le x_2\le 2\}$, und sei $f:I\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1,x_2)=\exp(x_1+x_2).$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_I f(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2)$!

3. Sei $J=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le\alpha\le\frac{\pi}{2},0\le\beta\le\frac{\pi}{2}\}$, und sei $g:J\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$g(\alpha,\beta)=\sin(\alpha+\beta).$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_J g(\alpha,\beta)\,d(\alpha,\beta)$!

4. Sei K ein 3-dimensionales Intervall, und sei F die konstante Funktion $F(x)=1\ \forall x\in K$. Welche geometrische Bedeutung hat das Integral $\displaystyle\int_K F(x)\,dx$?

Anmerkung: Das Integral kann auch in der Form $\displaystyle\int_K dx$ angeschrieben werden.

5. Sei W der n-dimensionale Einheitswürfel (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq x_j \leq 1$ für $j = 1, 2, \ldots n$). Weiters sei

$$E(x) = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2 \quad \text{für alle } x \in W.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_W E(x)\,dx$!

6. Sei L ein 2-dimensionales Intervall. Zeigen Sie, dass

$$X_j = \frac{\int_L x_j\,dx}{\int_L dx} \qquad j = 1, 2$$

die Koordinaten des Mittelpunkts (physikalisch: des „Massenmittelpunkts") von L sind! Können Sie diese Tatsache intuitiv verstehen?