Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 7

1. Gegeben ist folgendes Gleichungssystem in zwei Variablen x_1 und x_2:
$$
\begin{aligned}
{x_1}^2 + \sin(\pi\, x_1\, x_2) &= w_1 \qquad (2.1)\\
x_1 + \frac{3}{x_2} &= w_2\,. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$
Ist $(w_1, w_2) = (4, 3)$, so besitzt es eine Lösung, nämlich $(x_1, x_2) = (2, 3)$. (Überprüfen Sie das!) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über inverse Funktionen, dass es eine Umgebung U von $(4, 3)$ gibt, so dass das Gleichungssystem für jedes $(w_1, w_2) \in U$ genau eine Lösung besitzt, und dass die dadurch definierte Funktion
$$(w_1, w_2) \mapsto (x_1(w_1, w_2), x_2(w_1, w_2))$$
stetig differenzierbar ist!

2. Die Gleichung einer Ellipse in Hauptlage mit Hauptachsen $a > 0$ und $b > 0$ lautet
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Sei $P = (\tilde{x}, \tilde{y})$ ein Punkt auf der Ellipse mit $\tilde{y} > 0$. Berechnen Sie den Anstieg der Tangente an die Ellipse im Punkt P auf zwei Arten:

   (a) Durch Auflösen der Ellipsengleichung nach y (was zunächst zwei Lösungen ergibt, von denen Sie die richtige wählen müssen) gewinnen Sie eine Funktion („y als Funktion von x“), deren Graph die obere Hälfte der Ellipse ist. Berechnen Sie deren Ableitung!

   (b) Mit $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ kann die Ellipsengleichung in der Form $F(x, y) = 0$ geschrieben werden. Stellen Sie zunächst mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen (Buch, Seite 291, Spezialfall $m = n = 1$) sicher, dass lokal (d.h. in der Nähe des Punktes P) nach y aufgelöst werden kann! Verwenden sie dann die im Buch auf Seite 294 (Beispiel 8.42) angegebene Methode, um den gesuchten Anstieg durch Berechnung der partiellen Ableitungen von F an der Stelle P zu ermitteln!

   Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse, um sich zu vergewissern, dass sie das Gleiche aussagen!

   Anmerkung: Die zweite Methode ist allgemeiner als die erste. Sie benutzt nur $\tilde{y} \neq 0$, der erhaltene Ausdruck für die Tangentensteigung gilt daher auch für Punkte auf der unteren Hälfte der Ellipse. Die erste Methode liefert hingegen einen Ausdruck, der nur für $\tilde{y} > 0$, d.h. nur auf der oberen Ellipsenhälfte gilt.

3. Sei $f(x,y) = -x + y + \exp(y)$. Die Funktion g soll durch Auflösung von $f(x, g(x)) = 0$ gewonnen werden. Obwohl $g(x)$ nicht durch einen geschlossenen Ausdruck angegeben werden kann, lassen sich einige Aussagen machen:

   (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen (für $m = n = 1$), dass lokal (in der Nähe *jedes* Punktes $(y + \exp(y), y) \in \mathbb{R}^2$ für $y \in \mathbb{R}$) nach g aufgelöst werden kann.
   Anmerkung: Tatsächlich kann sogar *global* nach g aufgelöst werden. Die Funktion g ist eindeutig und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Können Sie auch das zeigen? Tipp: Lösen Sie die Gleichung $f(x,y) = 0$ nach x und stellen Sie sicher, dass die erhaltene Funktion („x als Funktion von y") eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Umkehrfunktion besitzt!

   (b) Zeigen Sie, dass $g(1) = 0$ ist!

   (c) Berechnen Sie die Ableitung $\dfrac{dg}{dx}(1)$!
   Tipp: Verwenden Sie dazu sie gleiche Methode wie in Aufgabe 2(b)!

4. Überprüfen Sie durch explizite Berechnung, dass der Gradient der Funktion

   $$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
   $$\phi(x,y) = x^2 - y$$

   in jedem Punkt normal auf ihre Höhenlinien steht! Machen Sie eine Skizze dieser Situation!

5. Ermitten Sie unter Verwendung des Gradienten die Tangentialebene an die durch die Gleichung

   $$x^2 + y^2 + z^4 = 26$$

   beschriebene Fläche im Punkt $(4,3,1)$!

6. Ermitteln Sie die kritischen Punkte (d.h. die Kandidaten für Extremalstellen) der Funktion

   $$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
   $$g(x,y) = x\,y$$

   unter der Nebenbedingung

   $$x^2 + y^2 = 1$$

   (a) durch Reduktion des Problems auf eine Extremwertaufgabe in einer einzigen Variablen (beispielsweise, indem Sie (x,y) durch ebene Polarkoordinaten ausdrücken)

   (b) unter Verwendung eines Lagrange-Multiplikators!