Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 6

1. Gegeben ist die Polynomfunktion in drei reellen Variablen

$$p(x,y,z) = -y\,z + 2\,x^2\,y^2 + x^3 - 2\,x\,y\,z + 5\,y - z + 7\,y\,z^2 + x^2 + 4.$$

Schreiben Sie die Taylorpolynome vom Grad 0, 1, 2, 3 und 4 um die Entwicklungsstelle $(0,0,0)$ an!

Anmerkung: Wenn Sie die Eindeutigkeit der Taylorpolynome benutzen und wissen, was der Grad eines Polynoms in mehreren Variablen ist, müssen Sie dabei überhaupt nichts rechnen!

2. Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion

$$f(x_1,x_2) = \exp\left(x_1 + {x_2}^2\right)$$

um die Stelle $(0,0)$!

3. Entwickelt man für festgehaltenes x

$$\chi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,t + t^2}}$$

um die Stelle $t = 0$ bis zur zweiten Ordnung in t, so hängen die Taylorkoeffizienten von x ab. Berechnen Sie sie!

Anmerkung: Bricht man nicht – wie in dieser Aufgabe – nach der zweiten Ordnung in t ab, sondern ermittelt die vollständige Tayorreihe, so erhält man die (in einem geeigneten Bereich konvergente) Darstellung $\chi(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n$. Die hier auftretenden Funktionen P_n heißen *Legendre-Polynome*, die Funktion χ heißt *erzeugende Funktion* der Legendre-Polynome. Die Legendre-Polynome sind für die verschiedensten physikalischen Probleme von Bedeutung.

4. Berechnen Sie die Hessematix der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion

$$g(x_1,x_2) = x_1\,e^{x_1\,x_2}$$

an der Stelle $x_0 = (1,0)$!

5. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x_1, x_2) = {x_1}^3 - x_1\, {x_2}^2 - {x_1}^2\, x_2 + {x_2}^3 - 2\, x_1.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen! Ermitteln Sie für jede von ihnen durch Untersuchung der Hessematrix, ob es sich um eine lokale Minimustelle, eine lokale Maximumstelle oder eine Sattelstelle handelt oder ob die Hessematrix keine Auskunft darüber gibt!

6. Bestimmen Sie alle Minimumstellen und alle Maximumstellen der Funktion

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$V(x, y) = \big(x^2 + y^2 - 1\big)^2$$

Anmerkung 1: Aufpassen! Obwohl ganz einfach, ist diese Situation kein Fall für die gedankenlose Anwendung eines Kochrezepts! Es ist hilfreich, wenn Sie sich zuerst darüber orientieren, wie der Graph von V aussieht!

Anmerkung 2: Die Funktion V heißt *Higgs-Potential* und hat mit dem Higgs-Teilchen zu tun.