Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 5

1. Die potentielle Energie eines Teilchens wird durch eine Funktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beschrieben, d.h. wenn es sich am Ort $x = (x_1, x_2, x_3)$ befindet, ist seine potentielle Energie gleich $V(x)$. Nun bewegt sich das Teilchen, und seine Bewegung wird durch eine Funktion $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschrieben, d.h. zum Zeitpunkt t befindet es sich am Ort $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ ist. Drücken Sie

$$\frac{d}{dt} V(\xi(t)),$$

(d.h. die Ableitung der Verkettung $V \circ \xi$) durch die Aleitungen von V und ξ aus!

Anmerkung: Dieser Spezialfall der Kettenregel ist in der klassischen Mechanik von großer Bedeutung!

2. Gegeben sind eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x) \neq (0,0,0)\ \forall x \in \mathbb{R}^3$ und Komponentenfunktionen (F^1, F^2, F^3) sowie die Normfunktion

$$\begin{aligned} &\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ &\chi(x) = \|x\|. \end{aligned}$$

Stellen Sie eine Formel für die partiellen Ableitungen der Verkettung $\chi \circ F$, d.h. eine Formel für $\frac{\partial}{\partial x_j} \|F(x)\|$, auf, in der als einzige Ableitungen jene der Komponentenfunktionen auftreten!

Anmerkung: Mit anderen Worten handelt es sich um eine Formel für den Gradienten der Norm eines *Vektorfeldes*.

3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, x_0 eine Stelle im $\mathbb{R}^3$ und $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Im Folgenden werden f und x_0 festgehalten und $\vec{e}$ variiert.

   (a) Drücken Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0)$ durch $\|\mathrm{grad} f(x_0)\|$ und den Winkel θ aus, den $\vec{e}$ mit $\mathrm{grad} f(x_0)$ einschließt!

   (b) Benutzen Sie Ihr Ergebnis, um die Maximalitätseigenschaft des Gradienten zu diskutieren: Wie muss θ gewählt werden, damit $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0)$ maximal/Null/minimal ist?

4. Sei ϕ ein *radialsymmetrisches Skalarfeld*, d.h.

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \psi(r) \text{ mit } r = \|x\| \equiv \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\,.$$

   (a) Drücken Sie den Gradienten von ϕ durch die Ableitung von ψ aus!

   (b) Wenden Sie die in (a) erhaltene Formel auf jenes Feld ϕ an, das sich mit $\psi(r) = \frac{1}{r}$ ergibt! Drücken Sie in Worten aus, in welche Richtung der Gradient zeigt und welche Norm er hat!

   (Physikalische Anwendung: Bis auf eine multiplikative Kontante stellt ϕ das Newtonsche Gravitationspotential einer im Koordinatenursprung sitzenden Punktmasse bzw. das elektrostatische Potential einer im Ursprung sitzenden Punktladung dar. Die zugehörige Gravitationsfeldstärke bzw. die elektrische Feldstärke ist dann gleich $-\mathrm{grad}\,\phi$. Wird sie mit einer Probemasse bzw. Probeladung multipliziert, so ergibt sich die entsprechende Kraft.)

5. Wie ist θ_x zu wählen, so dass der Mittelwertsatz (Buch, Seite 275) mit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x_1, x_2) = {x_1}^3 + {x_2}^2,$$

$x = (1, 0)$ und $x_0 = (0, 0)$ erfüllt ist?