Universität Wien, SS 2015

# Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

## Übungstermin 4

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ (Buch Seite 260), dass jede Funktion der Form

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $f(x_1, x_2) = a + b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + d_{11}\, {x_1}^2 + 2\, d_{12}\, x_1\, x_2 + d_{22}\, {x_2}^2$
   wobei $a, b_j, d_{jk} \in \mathbb{R}$ gegebene Koeffizienten sind

   an der Stelle $(0, 0)$ differenzierbar ist!

   Anmerkung 1: Die Stelle $(0, 0)$ wurde hier vorgegeben, um die Rechnung zu vereinfachen. Tatsächlich ist jede Funktion vom obigen Typ an *jeder* Stelle $\in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

   Anmerkung 2: Die Indizes der Koeffizienten sind so gewählt, dass der Funktionsterm in der kompakten Form $f(x_1, x_2) = a + \sum_{j=1}^{2} b_j\, x_j + \sum_{j,k=1}^{2} d_{jk}\, x_j\, x_k$ geschrieben werden kann. Diese Schreibweise ist unter anderem deshalb besonders nützlich, weil sie in höheren Dimensionen viel Schreibarbeit ersparen kann.

2. Die Existenz der partiellen Ableitungen einer Funktion an einer Stelle reicht *nicht* aus, um die Differenzierbarkeit der Funktion an dieser Stelle zu garantieren. Ein Gegenbeispiel ist:

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ an der Stelle $(0, 0)$ existieren, aber dass $f$ an dieser Stelle nicht differenzierbar ist! Wie sieht der Graph von $f$ aus?

3. Ermitten Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $f(x_1, x_2) = 3 + 4\, x_1 - 2\, x_2 + {x_1}^2 + 2\, x_1\, x_2 + 3\, {x_2}^2$

   im Punkt $\big(1, 2, f(1, 2)\big)$ !

4. Berechnen Sie die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) der Funktion

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $f(x) \equiv (f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2)) = (x_1 \sin(x_2), 3\, x_2 \cos(x_1))$

   an einer allgemeinen Stelle $(x_1, x_2)$ !