Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 3

1. Berechnen Sie (innerhalb des größtmöglichen Definitionsbereichs):

   (a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3\,x^3\,y - 2x\,y^3\right)$

   (b) $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\,\dfrac{\sin(\xi\,\eta)}{\xi\,\eta}$

   (c) $\dfrac{\partial}{\partial x_3}\,\dfrac{1}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}}$

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}$. Berechnen Sie

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(2,1)$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(-1,2)$

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(t,t)$ für $t \neq 0$

3. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 + 3y$.

   (a) Berechnen Sie den Gradienten von h!

   (b) Visualisieren Sie den Gradienten von h in einer handgefertigten Skizze, indem Sie $\mathrm{grad} f(x_1, x_2)$ für ganzzahlige Werte von x_1 und x_2 zwischen -3 und 3 als Pfeile einzeichnen!

   (c) Optional, aber sehr nützlich: Erstellen Sie eine feinere (und schönere) Visualisierung mit dem Computeralgebrasystem *Mathematica*, indem Sie folgende Befehle ausführen:

   ```
   h = x^2 + 3y
   gr = Grad[h,{x,y}]
   VectorPlot[gr,{x,-3,3}, {y,-3,3}]
   ```

   Es zahlt sich aus, wenn Sie sich mit den Grundfunktionalitäten von *Mathematica* vertaut machen!

4. Die Temperaturverteilung auf einer ebenen Platte wird durch die Funktion

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$T(x_1, x_2) = a + b\,({x_1}^2 + 2{x_2}^2)$$

modelliert, wobei die Konstanten a und b durch $a = 290\,\mathrm{K}$ und $b = 2\,\mathrm{K}/\mathrm{m}^2$ gegeben sind (K = Kelvin, m = Meter).

(a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von T in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ an der Stelle $\tilde{x} = (x_1 = 0\,\mathrm{m}, x_2 = 5\,\mathrm{m})$ und interpretieren Sie sie physikalisch!

Tipp 1: Berechnen Sie die Richtungsableitung entweder mit der im Buch auf S. 252/253 beschriebenen Methode oder blättern Sie vor und benutzen die auf S. 268 angegebene Formel!

Tipp 2: Wenn Sie Probleme mit der Interpretation haben, sehen Sie sich die physikalischen Einheiten an! Sie sind in diese Aufgabe eingebaut, nicht um sie schwieriger, sondern um sie leichter zu machen!

(b) Benutzen Sie nur den Wert der Temperatur an der Stelle $\tilde{x}$ und die in (a) ermittelte Richtungsableitung, um einen Näherungswert der Temperatur an jener Stelle anzugeben, die von $\tilde{x}$ aus $1\,\mathrm{cm}$ entfernt in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}$ liegt!

5. Mit

$$\psi : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$
$$\psi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

berechnen Sie $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$!

6. Mit $H(r,t) = \displaystyle\int_r^t e^{r\,(s-t)^2}\,ds$ berechnen Sie $\dfrac{\partial H}{\partial t}(r,t)$!