Universität Wien, SS 2015

Übungen zu Analysis für PhysikerInnen II

Übungstermin 2

1. Mit $x = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$ berechnen Sie $\|x\|$, $\|y\|$ und $\|x - y\|$! Welche geometrischen Bedeutungen können Sie diesen drei Zahlen zuschreiben?

2. Sei $a = (2, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $b = (2.1, -2.9, 0.9) \in \mathbb{R}^3$. Für jedes $\varepsilon > 0$ wird mit $U_\varepsilon(a)$ die ε-Umgebung von a bezeichnet (vgl. Buch, S. 234).
   (a) Gilt $b \in U_{0.2}(a)$ oder $b \notin U_{0.2}(a)$?
   (b) Gilt $b \in U_{0.1}(a)$ oder $b \notin U_{0.1}(a)$?
   (c) Für welche $\varepsilon > 0$ gilt $b \in U_\varepsilon(a)$, für welche $\varepsilon > 0$ gilt $b \notin U_\varepsilon(a)$?

3. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Punktfolge in $\mathbb{R}^2$ mit $a_{k,1} = 1 - \frac{1}{k}$ und $a_{k,2} = \frac{2k+1}{k+4}$ für $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Berechnen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$!
   (b) Erstellen Sie eine Skizze dieser Situation! Sie soll die Lage einiger Folgenglieder und die Lage des Grenzwerts zeigen!

4. Wie sieht der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ aus? Versuchen Sie, ihn zu skizzieren!

5. Wie sieht der Graph der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(0, 0) = 1$ und

$$g(x_1, x_2) = \frac{\sin\left(\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\right)}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}} \text{ für } (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

   aus? Versuchen Sie, ihn zu skizzieren!

6. Bestimmen Sie die Höhenlinien der folgenden Funktionen und machen sie jeweils eine Skizze!
   (a) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = 2\,x_1 - 3\,x_2$.
   (b) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x_1, x_2) = \exp\left({x_1}^2 - x_2\right)$.
   (c) Funktion g von Aufgabe 5.

7. Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

an der Stelle $(0,0)$ stetig ist!

Tipp: Beweisen und verwenden Sie die Ungleichung $|{x_1}^2\, {x_2}^2| \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2)^2$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$!

8. Aufgabe 7 kann auch mit einer Methode gelöst werden, die nicht im Buch steht: Verwenden Sie ebene Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ($x_1 = r\cos(\varphi)$, $x_2 = r\sin(\varphi)$ mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$) und die Folgendefinition der Stetigkeit!

Tipp: Das k-te Glied einer Folge in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ist durch Werte r_k und φ_k charakterisiert. Überlegen Sie, wie die Bedingung, dass eine solche Folge gegen $(0,0)$ konvergiert, durch diese Werte ausgedrückt lautet! Wenn Sie nun $\dfrac{{x_1}^2\, {x_2}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}$ durch Polarkoordinaten ausdrücken, sollten Sie (ausgerüstet mit dem Konzept der Folgenstetigkeit) sofort erkennen, dass

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (0,0)} \frac{{x_1}^2\, {x_2}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2} = 0$$

gilt!