Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 14

1. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ mit Hilfe des Majorantenkriteriums!

2. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums!

3. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ mit Hilfe des Wurzelkriteriums!

4. Führen Sie den Beweis des Leibniz-Kriteriums, der im Skriptum nur skizziert ist, genauer aus!

5. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Der den folgenden Aufgaben zugrundeliegende Stoff wird in der Vorlesung erst knapp vor manchen Übungsterminen besprochen. Nutzen Sie die Pfingsferien, um sich mit Hilfe des Skriptums vorzubereiten!

6. Taylorreihen von Sinus und Cosinus: Verifizieren Sie die im Skriptum in (8.121) – (8.124) angegebenen Beziehungen!

7. Berechnen Sie die Taylorpolynome der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \to \sin(x)\, e^x + 1$ mit Mittelpunkt 0 bis zur dritten Ordnung! Plotten sie ihre Graphen zusammen mit jenem von f.

8. Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ (an der Stelle 0 stetig fortgesetzt) mit Mittelpunkt 0.

9. Überprüfen Sie die im Skriptum in (8.151) angegebene Beziehung!

10. Die Funktion E sei definiert durch $E(v) := \dfrac{m\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, wobei m und c positive Konstanten sind. Entwickeln Sie E in eine Potenzreihe mit Mittelpunkt 0 bis zur vierten Ordnung!

    Falls Sie auch Physik studieren: Wo wird diese Reihenentwicklung benötigt? Was haben Sie damit berechnet?

11. Ermitteln Sie die Asymptote(n) der Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - 1}$ (größtmöglicher Definitionsbereich)!

12. Man könnte meinen, dass für eine differenzierbare Funktion die Existenz einer Asymptote gesichert ist, wenn ihre Ableitung im Unendlichen konvergiert. Für rationale Funktionen ist das auch der Fall, aber es gilt nicht allgemein, wie das Beispiel der Funktion $u : x \mapsto x + \ln(x)$ zeigt. Die Ableitung $u' : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ strebt für $x \to \infty$ gegen 1. Zeigen Sie, dass u keine Asymptote besitzt!

13. Für welche x konvergiert die im Skriptum in (8.165) angegebene Reihe?

14. Im Skriptum sind für e und π Reihendarstellungen angegeben. Untersuchen Sie, wie „schnell“ bzw. „langsam“ sie konvergieren! Wie nahe kommt man jeweils der Summe der Reihe, wenn die ersten 5, 10, 20 nichtverschwindenden Glieder addiert werden? Nehmen Sie als Maß für die Güte der k-ten Partialsumme s_k den relativen Fehler $\dfrac{s_k - s}{s}$ (oder, wenn es Ihnen lieber ist, den prozentuellen Fehler, also das 100%-fache davon), wobei s die Summe der Reihe ist! (Die Berechnung führen Sie natürlich mit einem Computeralgebra-System durch!)