Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 13

1. Untersuchen Sie die Funktion $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ ($D =$ größtmöglicher Definitionsbereich) nach allen Regeln der Kunst!

2. Untersuchen Sie die Funktion $g : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$ ($D =$ größtmöglicher Definitionsbereich) nach allen Regeln der Kunst!

3. Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x\, e^{-x}$ nach allen Regeln der Kunst!

4. Die Funktionen *Sinus Hyperbolicus* und *Cosinus Hyperbolicus* sind (beide auf ganz $\mathbb{R}$) definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big)$$
$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big).$$

   Skizzieren Sie ihre Graphen und zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

   Damit sind die Bestandteile „Sinus“ und „Cosinus“ ihrer Namen erklärt. Aber was haben die beiden Funktionen mit einer Hyperbel zu tun?

5. Berechnen Sie die Ableitungen von $\sinh$ und $\cosh$ und drücken Sie sie durch $\sinh$ und $\cosh$ aus!

6. Der *Areasinus Hyperbolicus* asinh ist die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus*. Klären Sie die Definitions- und Wertemengen der beiden Funktionen ab! Zeigen Sie:

$$\operatorname{asinh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big).$$

   Für welche x gilt diese Beziehung?

7. Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Finden Sie eine Rekursionsformel für $\int \sin^n(x)\, dx$.

8. Berechnen Sie $\int \frac{dt}{t^2-1}$. (Tipp: Es gilt $\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{2}{t^2-1}$.)

9. Berechnen Sie $\int \frac{t\,dt}{(1+t)^3}$. (Tipp: Transformieren Sie auf die neue Variable $x = 1 + t$.)

10. Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\sin(x)}$. (Tipp: Substituieren Sie $x = \operatorname{acos}(t)$.)

11. Berechnen Sie $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$. (Tipp: Substituieren Sie $x = \sinh(t)$.)

12. Berechnen Sie $\int \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$. (Tipp: Transformieren Sie auf die neue Variable $x = \sqrt{t}$.)

13. Finden Sie ein möglichst elegantes Argument, um

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$$

zu begründen! (Nutzen Sie dabei aus, dass $\sin$ und $\cos$ nur „verschobene" Varianten voneinander sind!)

14. Zeigen Sie, dass für die Dichteverteilung ρ der Normalverteilung (Skriptum, Fußnote 60 auf Seite 231) die in der Stochastik wichtige Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\rho(x)\,dx = \mu$$

gilt! Verwenden Sie dabei (ohne Beweis), dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1$ gilt.

Tipp: Berechnen Sie zuerst die Ableitung von ρ und stellen Sie sie in der Form

$$\rho'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\,\rho(x)$$

dar! Jetzt ist (fast) nichts mehr zu tun!

15. Zeigen Sie zuerst, dass für alle $\lambda > 0$ gilt: $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$. Derartige Formeln darf man unter sehr schwachen Bedingungen nach dem Parameter λ differenzieren. Nutzen Sie diesen Umstand, um $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n\,e^{-x}\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen!