Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 11

1. Für ein $n \in \mathbb{N}^*$ seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene reelle Zahlen. Weiters sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sum\limits_{j=1}^{n}(x - a_j)^2$. Untersuchen Sie f auf lokale und globale Extrema!

2. Beweisen Sie, dass eine auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall definierte stückweise stetige Funktion integrierbar ist, und dass ihr Integral durch Formel (7.19) des Skriptums gegeben ist! (Das ist Satz [7.9] des Skriptums. Sie können dafür natürlich den davor stehenden und im Skriptum bewiesenen Satz [7.8] verwenden.)

3. Führen Sie im Skriptum in (7.29) angegebene Berechnung von $\int\limits_a^b x^2\,dx$ im Detail aus!

4. Berechnen Sie $\int\limits_a^b dx$ und $\int\limits_a^b x\,dx$ mit Hilfe von Riemannschen Summen!

5. Im Skriptum ist im Beweis von Satz [7.14] (Eigenschaften des bestimmten Integrals) Punkt (ii) nur angerissen. Vervollständigen Sie das Argument!

6. Machen Sie eine Skizze, die den Beweis des Hauptsatzes der Analysis illustriert! Dabei sollen neben dem Graphen von f auch die im Beweis vorkommenden Größen a, x, h, $x + h$, ξ_h und $f(\xi_h)$ eingezeichnet sein.

7. Der Hauptsatz der Analysis kann auch in der Form

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

(für $f =$ stetig differenzierbar) angeschrieben werden. Das bestimmte Integral f' hängt erstaunlicherweise nur von den Werten von f an den Randstellen des Integrationsintervalls ab, nicht vom Verlauf von f im Inneren des Intervalls. Zeigen Sie, dass man dieses Phänomen in gewisser Weise als Ausdruck einer Teleskopsumme verstehen kann: Teilen Sie das Intervall $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle der Länge h, nähern Sie $f'(x)$ in jedem Teilintervall durch den Differenzenquotienten von f in diesem Intervall an, schreiben Sie $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$ näherungsweise nach Art einer Riemannschen Summe

$$\sum_{\text{Teilintervalle}} \text{Differenzenquotient} \cdot h \tag{2.1}$$

und führen Sie die Summe aus! Erstaunlicherweise kommt trotz der (vermeintlichen) Näherung das exakte Ergebnis $f(b) - f(a)$ heraus! Wie kann man das verstehen? Hat es einen Sinn, den Grenzübergang $n \to \infty$ zu betrachten, wo doch das Ergebnis gar nicht von n abhängt? Eröffnet sich hier eine Möglichkeit, den Hauptsatz anders zu beweisen als im Skriptum?

8. Berechnen Sie (für $f =$ stetig)
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt.$$

9. Sei $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(ax)\cos(ax)}{2a}$ eine Stammfunktion von $\sin^2(ax)$ ist!

10. Zeigen Sie, dass $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ im Bereich $|x| < 1$ eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{1-x^2}$ ist!

11. Für $0 < x < 1$ berechnen Sie $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$ und $\lim\limits_{x\uparrow 1}\int\limits_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$. Wie interpretieren Sie (anhand der Graphen der beteiligten Funktionen) das Ergebnis für den Grenzwert?

12. In einem Ohmschen Wechselstromkreis sei die Spannung durch $U(t) = U_0\sin(\omega t)$ und die Stromstärke durch $I(t) = \dfrac{U_0}{R}\sin(\omega t)$ gegeben, wobei die Kreisfrequenz ω und der Ohmsche Widerstand R positive Konstanten sind. Die Leistung zum Zeitpunkt t ist durch $P(t) = U(t)I(t)$ gegeben. Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{P}$ der Funktion P im Intervall $[0, T]$, wobei T die (kleinste) Periode von U und I ist!
(Falls Sie Physik studieren: Interpretieren Sie das Ergebnis!)

13. Ausgehend von $\dfrac{d}{dx}\big(x\sqrt{1-x^2}\,\big) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, berechnen Sie $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

14. Die Vorzeichenfunktion v ist wie im Skriptum, (7.74), definiert. Zeigen Sie, dass die in (7.75) definierte Funktion V die Betragsfunktion ist!

15. Nachlese zur vorigen Aufgabe: Der Hauptsatz besagt doch $\dfrac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x)$ mit $F =$ Stammfunktion von f. Mit $f = v$ müsste demnach $V'(x) = v(x)$ sein. Aber V ist die Betragsfunktion und daher gar nicht differenzierbar! Offenbar ist V keine Stammfunktion von v, denn Stammfunktionen müssen differenzierbar sein. Was ist schiefgelaufen?