Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 10

1. Geben Sie ein Beispiel für eine reelle Funktion an, die in einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, im zugehörigen offenen Intervall (a, b) differenzierbar, aber an mindestens einer Randstelle (a oder b) nicht differenzierbar ist!

2. Beweisen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung!

3. Zeigen Sie, dass die im Skriptum in (6.111) definierte Funktion differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist!

4. Der lokale Monotoniesatz (Skriptum, Satz [6.43]) sagt über Beziehungen der Funktionswerte *untereinander* innerhalb jedes der Teilintervalle $(\xi - c, \xi)$ und $(\xi, \xi + c)$ nichts aus. Insbesondere behauptet er nicht, dass f in diesen Intervallen monoton ist. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem f in diesen Intervallen tatsächlich nicht monoton ist! (Wenn es Ihnen nicht gelingt, einen Term anzugeben, so können Sie auch in Worten oder mit einer Skizze ausdrücken, wie eine solche Funktion „aussieht“.)

5. Beweisen Sie: Die Eulersche Zahl e ist die (einzige) Maximumstelle der Funktion

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto x^{1/x}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

6. Um zu zeigen, dass die Umkehrung von Satz [6.57] (ii) des Skriptums nicht gilt, geben Sie ein Beispiel für eine streng konvexe (d.h. linksgekrümmte) Funktion an, für die f'' nicht überall positiv ist!

7. Um zu zeigen, dass die Umkehrung von Satz [6.57] (iii) des Skriptums nicht gilt, geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f und eine innere Stelle ξ des Definitionsbereichs an, die keine Wendestelle ist, aber an der dennoch $f''(\xi) = 0$ gilt!

8. Im Skriptum wurde die Aussage (i) der Regel von de l'Hospital unter anderem für den Spezialfall bewiesen, dass die an der Stelle ξ stetig fortgesetzten Funktionen f und g an der Stelle ξ *differenzierbar* sind, dass deren Ableitungen *stetig* sind und dass $g'(\xi) \neq 0$ ist. Machen Sie eine *Zeichnung*, mit deren Hilfe verständlich wird, warum die Regel in diesem Fall (setzen Sie „schöne“ Funktionen voraus, wie sie auch im Mathematikunterricht vorkommen) funktioniert!

9. Berechnen Sie unter Anwendung der Regel von de l'Hospital die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,.$$

Gewinnen Sie aus dem Ergebnis der ersten Rechnung eine Näherungsformel für $\sqrt{1+x}$, die für $|x| \ll 1$ anwendbar ist, und für die man keine Wurzel ziehen muss!

10. Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Zeigen Sie unter Anwendung der Regel von de l'Hospital, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x} = 0$ gilt.

11. Kann man die Regel von de l'Hospital so anwenden?

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin'(x)}{\cos'(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = \frac{0}{-1} = 0.$$

12. Wenden Sie das Newton-Verfahren an, um eine Näherungslösung der Gleichung

$$2\,x - \sin(x) - 1 = 0$$

im Intervall $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ zu ermitteln! Führen Sie einige Iterationsschritte durch (etwa mit einem Computeralgebra-System oder mit Tabellenkalkulation) und kontrollieren Sie die Genauigkeit! Könnte es mehrere solcher Lösungen geben? (Gleichungen dieses Typs sind in der Astronomie wichtig, um Planetenpositionen vorherzusagen. Für Interessierte: Googeln Sie „Kepler-Gleichung"!)

13. Fertigen Sie übersichtliche Skizzen an, aus denen ersichtlich ist, wie die Arcusfunktionen definiert sind und wie ihre Graphen aus jenen der Winkelfunktionen hervorgehen!

14. Leiten Sie die im Skriptum in (1.165) − (1.168) angegebenen Formeln für die Ableitungen der Arcusfunktionen her!

15. Wie kann man anschaulich erklären, dass sich die Ableitungen von asin und acos nur durch das Vorzeichen unterscheiden? Wie ist es möglich, dass sich die Ableitungen von atan und acot nur durch das Vorzeichen unterscheiden, wo doch atan stetig und acot unstetig ist?

16. Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten des Arcus Tangens!

17. Aus den kartesischen Koordinaten $(x, y) \neq (0, 0)$ eines Punktes sollen seine Polarkoordinaten (r, φ) bestimmt werden. Die im Skriptum in (6.171) angegebene Formel zur Berechnung von φ ist, wie angemerkt, falsch. Geben Sie eine richtige Formel an (wobei Sie voraussetzen können, dass $x \neq 0$ ist)!