Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 9

1. Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Exponentialgleichung $3^x = 8$.

2. Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2^{4x-3}4^{2x-1} - 8^x = 0$.

3. Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\lg(4x + 3) = 2$.

4. Sei $a > 1$. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{x \downarrow 0} \log_a(x) = -\infty$$
gilt! (Tipp: Erinnern Sie sich, dass $\log_a$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto a^x$ ist! Führen Sie die zu zeigende Aussage auf eine entsprechende Aussage für die Exponentialfunktion zurück! Benutzen Sie bei Bedarf die im Skriptum unter Beispiele [5.62] angegebenen Formeln sowie Satz [5.66]!)

5. Geben Sie eine *qualitative*, auf einem Vergleich von Funktionsgraphen beruhende Begründung dafür an, dass die Funktion $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist, die Funktion $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ jedoch nicht!

6. Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie direkt mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit und der Ableitung (Skriptum, [6.1]), dass f an allen Stellen $x > 0$ differenzierbar ist und berechnen Sie an diesen Stellen die Ableitung $f'(x)$. Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist!

7. Die stetige Fortsetzung der zu einer Stelle ξ gehörenden Differenzenquotientenfunktion einer differenzierbaren Funktion ist im Skriptum in (6.6) definiert. Geben Sie sie für die Funktion f von Aufgabe 6 und eine beliebige Stelle $\xi > 0$ an!

8. Sei f die Funktion von Aufgabe 6. Geben Sie die zu einer beliebigen Stelle $\xi > 0$ gehörende Tangentenfunktion $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an! Erstellen Sie für $\xi = 1$ einen Plot der Graphen von f und t.

9. Zeigen Sie direkt mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit und der Ableitung (Skriptum, [6.1]), dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist!

10. Im Skriptum, Satz [6.7] wird die Differenzierbarkeit so charakterisiert: Eine reelle Funktion f mit Definitionsbereich D ist genau dann an der Stelle $\xi \in D$ differenzierbar, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : D \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \to \xi} \frac{r(x)}{x - \xi} = 0$$

gibt, sodass für alle $x \in D$

$$f(x) - f(\xi) = c\,(x - \xi) + r(x)$$

gilt. Geben Sie für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ und beliebiges ξ so ein c und so eine Funktion r an!

11. Wie in Aufgabe 10, für die Funktion f von Aufgabe 6 und $\xi > 0$.

12. Beweisen Sie die Quotientenregel (Skriptum, Satz [6.15] (iv))!

13. Beweisen Sie: Unter allen positiven reellen Zahlen a ist e die *einzige*, für die

$$a^x \geq 1 + x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

gilt. Sie können dafür alles voraussetzen, was im Skriptum *vor* Satz [6.24] steht! Wie zeigt sich diese Eigenschaft, die e eindeutig festlegt, an den Funktionsgraphen der Exponentialfunktionen?

14. Beweisen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass $\dfrac{d}{dx}\, x^p = p\, x^{p-1}$ für alle $p \in \mathbb{N}^*$.

15. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$. Beschreiben Sie zuerst *in Worten*, wie ihr Graph zustande kommt, und dann machen Sie eine Rechnung, um zu zeigen, dass f' an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, d.h. dass $f''(0)$ nicht existiert!

16. Geben Sie eine reelle Funktion an, die zweimal, aber nicht dreimal differenzierbar ist!