Universität Wien, SS 2017

# Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

## Übungstermin 8

1. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big).$$

Stellen Sie (mit einem möglichst einfachen Argument) eine analoge Formel für $\cos^2(x)$ auf!

2. Leiten Sie ein Additionstheorem für die Tangensfunktion her:

$$\tan(x_1 + x_2) = \ldots,$$

wobei die Punkte für einen Term stehen, in dem nur $\tan(x_1)$ und $\tan(x_2)$ vorkommen!

3. Zeigen sie, dass die Gleichung $x^6 - x^5 + 2x^2 + x - 1 = 0$ zumindest eine reelle Lösung besitzt!

4. Zeigen sie, dass die Gleichung $\cos(x) = x$ zumindest eine reelle Lösung besitzt!

5. Beweisen Sie, dass jede reelle Polynomfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle besitzt!

6. Beweisen Sie den folgenden Fixpunktsatz: Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Dann gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$. (Tipp: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h$ mit $h(x) = f(x) - x$.) Finden Sie eine intuitive, auf der „Linienhaftigkeit" des Graphen von $f$ beruhende Erklärung dafür? (Tipp: Machen Sie eine Skizze!)

7. Zeigen Sie mit Hilfe des in Aufgabe 6 bewiesenen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung $e^{-x} = x$ zumindest eine Lösung im Intervall $(0, 1)$ besitzt!

8. Geben Sie je ein Beispiel für eine stetige Funktion $f : I \to I$ an, für die es *kein* $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \xi$ gibt, wobei

   (a) $I$ ein beschränktes, aber nicht abgeschlossenes Intervall ist.
   (b) $I$ ein unbeschränktes Intervall ist.

9. Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion $f$ mit lokaler Extremstelle $\xi$ an, sodass $f$ in *keinem* Intervall der Form $(\xi - c, \xi)$ oder $(\xi, \xi + c)$ monoton ist!

10. Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon$-$\delta$-Charakterisierung der Stetigkeit, dass die Funktion $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist!

11. Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon$-$\delta$-Charakterisierung der Stetigkeit, dass die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion
$$g(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{falls } x < 0 \\ 1 - x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$
an der Stelle $0$ unstetig ist!

12. Kann die Funktion $\psi : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \dfrac{|x| + x}{x + 1}$ an der Stelle $-1$ stetig fortgesetzt werden? Falls ja, geben Sie die stetige Fortsetzung an!

13. Sei $\phi : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{1 - x}$ mit größtmöglichem Definitionsbereich. (Geben Sie diesen an!) Ist $\phi$ an der Stelle $1$ stetig fortsetzbar? Falls ja, geben Sie die stetige Fortsetzung an! Falls nein: Wie verhält sich $\phi$ nahe der Stelle $1$? Wie verhält sich $\phi$ im Unendlichen? Skizzieren oder plotten Sie den Graphen!

14. Wie in Aufgabe 13 mit der Funktion $\sigma : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}{1 - x}$ und ebenfalls mit der Stelle $1$. (Tipp: Zerlegen Sie $x^3 - x^2 - x + 1$ in Faktoren, um die hier auftretende Struktur besser zu erkennen!)

15. Kann die Funktion
$$\chi : \mathbb{R}\backslash\{3, 4\} \to \mathbb{R}$$
$$\chi(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - 7x + 12}$$
an der Stelle $3$ stetig fortgesetzt werden? Falls ja, geben Sie die stetige Fortsetzung an!

16. Kann die Funktion
$$\rho : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$\rho(x) = \frac{\tan(x)}{x}$$
an der Stelle $0$ stetig fortgesetzt werden? Falls ja, geben Sie die stetige Fortsetzung an!