Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 7

1. Beweisen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, indem Sie eine Methode angeben, wie man sie in Form einer unendlichen Liste anordnen kann!

2. Tippen Sie den Term $x^2 + \frac{1}{x}$ in Ihr Lieblings-Computeralgebra-System ein und sehen Sie sich den Graphen im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ an! Er sieht dann ein bisschen wie eine Parabel aus, die beim Ursprung zerschnitten und deformiert worden ist. Können Sie erklären, warum das so ist?

3. Ist die im Skriptum definierte Dirichletfunktion periodisch? Wenn nein, beweisen Sie es! Wenn ja, was lässt sich über die Periode sagen?

4. Zeigen Sie direkt mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwerts, dass $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$ ist! Argumentieren Sie dabei hundertprozentig korrekt!

5. Untersuchen Sie, ob Grenzwert, linksseitiger Grenzwert und rechtsseitiger Grenzwert der Funktion $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x + |x|}{2x}$ an der Stelle 0 existieren! Berechnen Sie jene, die existieren!

6. Berechnen Sie (falls existent) den Grenzwert $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$.

7. Berechnen Sie (falls existent) den Grenzwert $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$.

8. Berechnen Sie (falls existent) den Grenzwert $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^3 - 1} \right)$.

9. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz [5.40] des Skriptums, dass die Funktion $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist!

10. Sei f eine reelle Funktion mit Definitionsbereich D, und sei $D' \subseteq D$. Die Aussage „f ist in D' stetig“ (im Sinn von „$f|_{D'}$ ist stetig“) bedeutet nicht notwendigerweise dasselbe wie „f ist an jeder Stelle $\xi \in D'$ stetig“! Geben Sie ein Beispiel für eine Situation an, in der tatsächlich nur *eine* der beiden Aussagen zutrifft!

11. Die Umkehrfunktion einer stetigen bijektiven Funktion ist nicht notwendigerweise stetig. Im Skriptum, (5.83), ist ein Gegenbeispiel angegeben. Verifizieren Sie, dass die Funktion f bijektiv und in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist! Verifizieren Sie, dass ihre Umkehrfunktion f^{-1} nicht stetig ist! (Tipp: Beginnen Sie damit, sich die Graphen von f und f^{-1} anzusehen!)

12. Die Funktionen f und g seien wie im Skriptum, (5.90) und (5.91), definiert. Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 nicht stetig ist, g aber schon!

13. Beweisen Sie den im Skriptum angegebenen Satz [5.60]!
(Sie sollten den Satz aber nicht nur formal beweisen, sondern – wie im Skriptum angemerkt – sich auch etwas darunter *vorstellen* können!)

14. Berechnen Sie (als Grenzwert im eigentlichen Sinn oder im Sinn der bestimmten Divergenz): $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\lim\limits_{x\downarrow -1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. Berechnen Sie (als Grenzwert im eigentlichen Sinn oder im Sinn der bestimmten Divergenz): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$.

16. Berechnen Sie (als Grenzwert im eigentlichen Sinn oder im Sinn der bestimmten Divergenz): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2 + x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+1)^2 + x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$.