Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 6

1. Beweisen Sie: Jede geometrische Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|q| \geq 1$, $q \neq 1$, ist divergent.

2. Zeigen Sie, dass das im Skriptum angegebene Verfahren zur näherungsweisen Berechnung des Kehrwerts einer positiven Zahl a, das ohne Division auskommt, funktioniert!
Tipp: Zeigen Sie dazu, dass alle Folgenglieder (möglicherweise mit Ausnahme von x_0) $0 < x_k < \dfrac{1}{a}$ erfüllen, und dass die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ monoton wachsend ist!

3. Beweisen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

4. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $a_n = \dfrac{3n^2 + (-1)^n}{n^2+1}$ konvergent ist, berechnen Sie ihren Grenzwert und diskutieren Sie, auf welche Weise sich die Glieder a_n dem Grenzwert annähern!

5. Zeigen Sie, dass die durch
$$\begin{aligned} &x_0 \text{ beliebig} \\ &x_{n+1} = r\,x_n \qquad \text{für } n \geq 0 \end{aligned}$$
rekursiv definierten Folgen für $r \in [0,1)$ stets gegen 0 konvergieren!

6. Zeigen Sie, dass die durch
$$\begin{aligned} &x_0 \in (0,1), \text{ ansonsten beliebig} \\ &x_{n+1} = r\,x_n(1-x_n) \qquad \text{für } n \geq 0 \end{aligned}$$
rekursiv definierten Folgen für $r \in [0,1]$ stets gegen 0 konvergieren!
Tipp: Zeigen Sie, dass die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist!

7. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

8. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$.

9. Untersuchen Sie das Verhalten der Folge $\left(\dfrac{(n^2-1)^2 - n^4}{3(-1)^n\,n^3 - 5}\right)$ hinsichtlich Konvergenz, bestimmter Divergenz, unbestimmter Divergenz!
Erstellen Sie eine geeignete Visualisierung!

10. Untersuchen Sie das Verhalten der Folge $\left(\dfrac{(n^2-n)^2-n^4}{3(-1)^n\,n^3-5}\right)$ hinsichtlich Konvergenz, bestimmter Divergenz, unbestimmter Divergenz!
Erstellen Sie eine geeignete Visualisierung!

11. Untersuchen Sie das Verhalten der Folge $\left(\dfrac{(n^2-1)^2+n^4}{3(-1)^n\,n^3-5}\right)$ hinsichtlich Konvergenz, bestimmter Divergenz, unbestimmter Divergenz!
Erstellen Sie eine geeignete Visualisierung!

12. Untersuchen Sie das Verhalten der Folge $\left(\dfrac{(-1)^n\,n^4}{3(-1)^n\,n^3-5}\right)$ hinsichtlich Konvergenz, bestimmter Divergenz, unbestimmter Divergenz!
Erstellen Sie eine geeignete Visualisierung!

13. Modifizieren Sie Satz [4,44] des Skriptums so, dass ein allgemeingültiges *notwendiges und hinreichendes* Kriterium entsteht, also eine Aussage der Form

„Eine reelle Zahlenfolge (a_n) divergiert genau dann bestimmt gegen ∞, wenn ...“,

wobei aber die grundlegende Idee des Satzes, nämlich die Rückführung auf eine Nullfolge, bestehen bleibt.

14. Intervallschachtelungen benötigen *abgeschlossene* Intervalle. Mit offenen oder halboffenen Intervallen würde das Intervallschachtelungsprinzip nicht gelten. Beispiel: Die Intervalle $\left(0, \dfrac{1}{n}\right]$ sind zwar „ineinandergeschachtelt“, aber es gibt keine Zahl, die in jedem von ihnen liegen würde. Suchen Sie die genaue Stelle im Beweis des Intervallschachtelungsprinzips, bei der verwendet wird, dass die Intervalle I_n abgeschlossen sind!

15. Ermitteln Sie die Häufungspunkte der Folge $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\,n+2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Erstellen Sie eine geeignete Visualisierung!