Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 5

1. Stellen Sie die Folge
$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, -\frac{8}{9}, \frac{9}{10}, -\frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \dots\right)$$
durch einen Term dar!

2. Ausgehend von einer Folge (a_n) wird die Folge (b_n) mit $b_n = \max(a_n, 0)$ definiert. Beschreiben Sie in möglichst einfachen Worten, wie man die zweite Folge aus der ersten enthält!

3. Diskuteren Sie die Monotonieeigenschaften der Folge $\left(\frac{n(n-1)}{n^2} - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Finden Sie eine möglichst elegante Argumentation!

4. Diskuteren Sie die Monotonieeigenschaften der Folge $\left(\frac{n^2+2n-3}{n^2+4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Bereiten Sie zwei Tafelpräsentation vor: (i) eine ausführliche und (ii) eine straffere, für die Sie höchstens 5 Minuten benötigen, und bei der die Betonung auf der Strategie und den Argumenten liegt, nicht auf Terumformungen. Es wird dann vor Ort entschieden, welche Version vorgeführt werden soll.

5. Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$. Zeigen Sie *direkt* mit Hilfe der Definition der Konvergenz (ohne Verwendung von darüber hinausgehenden Rechenregeln für konvergente Folgen), dass sie gegen 1 konvergiert!

6. Untersuchen Sie die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+5}$ auf Konvergenz. Falls sie konvergent ist, berechnen Sie ihren Grenzwert!

7. Untersuchen Sie die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{n}{\sqrt{n}+5}$ auf Konvergenz. Falls sie konvergent ist, berechnen Sie ihren Grenzwert!

8. Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ auf Konvergenz. Falls sie konvergent ist, berechnen Sie ihren Grenzwert!

9. Geben Sie zwei Folgen (a_n) und (b_n) an, für die $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gilt, und die $a_n < b_n \ \forall n$ erfüllen, für die aber *nicht* $a < b$ gilt!

10. Beweisen Sie den Satz: Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0.$$

11. Beweisen Sie den Satz: Ist (a_n) eine Nullfolge mit $a_n \neq 0 \ \forall n$, so ist die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ divergent.

12. Definieren Sie eine Folge aus rationalen Zahlen, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, und zwar so, dass die Glieder abwechselnd größer und kleiner als $\sqrt{2}$ sind!
(Sie müssen dafür nicht unbedingt eine Termdarstellung angeben. Es genügt, wenn Sie eine solche Folge so charakterisieren, dass sie *eindeutig festgelegt* ist. Wie Sie das machen, ist Ihnen überlassen.)

13. Beweisen Sie: Ist $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so ist die durch Mittelwertbildung aufeinanderfolgender Glieder definierte Folge

$$\left(\frac{a_0 + a_1}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{a_3 + a_4}{2}, \dots\right)$$

ebenfalls konvergent. Geben Sie den Grenzwert dieser Folge an!