Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 4

1. Sei $n \geq 2$. Setzen Sie in der Bernoullischen Ungleichung [Skriptum (2.12)] $1 + x = z$ und formulieren Sie sie als Aussage für z in der Form
$$z^n \geq \ldots$$
Drücken Sie auch die genaue Voraussetzung, wann sie gilt, durch z aus! Wann gilt Gleichheit? Überprüfen Sie ihr Ergebnis anhand der Funktionsgraphen für $n = 2$ und $n = 3$ analog zu Abbildung 1 im Skriptum!

2. Sei $n \geq 2$. Setzen Sie in der Bernoullischen Ungleichung [Skriptum (2.12)] $1 + x = \frac{1}{z}$ und formulieren Sie sie als Aussage für z in der Form
$$z^n \text{ Ordnungszeichen } \ldots$$
Drücken Sie auch die genaue Voraussetzung, wann sie gilt, durch z aus! Wann gilt Gleichheit? Überprüfen Sie ihr Ergebnis anhand der Funktionsgraphen für $n = 2$ und $n = 3$ analog zu Abbildung 1 im Skriptum!

3. Im Skriptum wird Satz [3.8] durch vollständige Induktion bewiesen. Modifizieren Sie den Beweis, indem Sie über die Binomialkoeffizienten lediglich die Information benutzen, dass $\binom{n}{j}$ die Anzahl der j-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist! (Sie müssen dafür praktisch nichts hinschreiben!)

4. Beweisen Sie (möglichst elegant!), dass
$$1 + x \leq \frac{1}{1 - x}$$
für alle $x < 1$. Für welche x gilt sogar die Gleichheit? Visualisieren Sie mit Hilfe von Funktionsgraphen!

5. Beweisen Sie direkt mit Hilfe der Definition des Absolutbetrags [Skriptum (2.15)], dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

   (i) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
   (ii) $|a\,b| = |a|\,|b|$
   (iii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

6. Beweisen Sie direkt mit Hilfe der Definition des Absolutbetrags [Skriptum (2.15)], dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b.$$

7. Untersuchen Sie die Menge
$$\left\{ -\frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \mathbb{R}_0^+$$
auf Existenz von Minimum, Infimum, Maximum und Supremum und geben Sie diese (falls existent) an! Begründen Sie!

8. Untersuchen Sie die Menge
$$\mathbb{R}^+ \backslash \left\{ \frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
auf Existenz von Minimum, Infimum, Maximum und Supremum und geben Sie diese (falls existent) an! Begründen Sie!

9. Untersuchen Sie die Mengen
$$(-1,1) \cap \mathbb{R}^+, \quad (-1,1) \cap \mathbb{R}_0^+, \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,) \cap \mathbb{Q}^+ \quad \text{und} \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,) \cap \mathbb{Q}_0^+$$
auf Existenz von Minimum, Infimum, Maximum und Supremum und geben Sie diese (falls existent) an! Begründen Sie!

10. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt in der Ungleichung
$$\big||a| - |b|\big| \;\le\; |a+b| \;\le\; |a| + |b|$$
sogar $=$ anstelle des ersten $\le$, wann gilt $=$ anstelle des zweiten $\le$?

11. Entgegen manchem SchülerInnenglauben gilt die Beziehung
$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \tag{2.1}$$
nicht allgemein. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt sie?

12. Seien $a, b > 0$. Vereinfachen Sie den Term
$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}\sqrt{b}}}{\sqrt{b}} \sqrt[5]{\frac{1}{b}} \tag{2.2}$$
und schreiben Sie ihn ohne Wurzelzeichen an!