Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 3

1. Mit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{-1, 1\}$ sei die Funktion $f : A \to B$ auf der Basis der Zuordnungs-Definition festgelegt durch

$$f(n) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

   Geben Sie f gemäß der Paarmengen-Definition des Funktionsbegriffs an!

2. Wie wir abbrechende Dezimalzahlen addieren, haben wir alle schon vor langer Zeit gelernt:

$$\begin{array}{r} 0.978 \\ +\,0.569 \\ \hline =1.547 \end{array}$$

   Im obigen Beispiel beginnen wir mit der Addition der Tausendstel-Stellen $8 + 9 = 17$, behalten die 7, notieren die 1 für den nächsten Schritt und arbeiten uns in der bekannten Weise nach links durch. Formulieren Sie ein Verfahren, wie die Dezimalentwicklung der Summe zweier eventuell *nichtabbrechender* Dezimalzahlen $0.x_1x_2x_3\dots$ und $0.y_1y_2y_3\dots$ aus den Ziffern x_j und y_j gewonnen werden kann!

3. Welche der folgenden Mengen besitzen ein größtes/kleinstes Element? Geben Sie jedes derartige Element an, falls es existiert!

   (i) $A = (0, \sqrt{2}\,) \cap \mathbb{Q}$

   (ii) $B = [0, \sqrt{2}\,] \cap \mathbb{Q}$

   (iii) $C = [0, \sqrt{2}]\backslash\mathbb{Q}$

   (iv) $D = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

4. Bestimmen Sie die Suprema und Infima der in der vorigen Aufgabe angegebenen Mengen!

5. Ermitteln Sie (*ohne* Methoden der Differentialrechnung), wo die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ ihren kleinsten Wert annimmt!

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+x$. Welche der folgenden Mengen besitzen ein größtes/kleinstes Element? Geben Sie jedes derartige Element an, falls es existiert!

   (i) $f([-1, 0])$. (ii) $f(\mathbb{R}^+)$. (iii) $f(\mathbb{R}_0^+)$.

7. Bestimmen Sie die Suprema und Infima der in der vorigen Aufgabe angegebenen Mengen!

8. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $-A := \{-x \mid x \in A\}$. Zeigen Sie:

$$\sup(-A) = -\inf(A) \qquad \text{(falls } A \text{ nach unten beschränkt ist)}$$
$$\inf(-A) = -\sup(A) \qquad \text{(falls } A \text{ nach oben beschränkt ist).}$$

9. Beweisen Sie die folgende Eigenschaft der Binomialkoeffizienten: Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$. Formulieren Sie diese Aussage als Eigenschaft des Pascalschen Dreiecks!

10. Beweisen Sie die folgende Eigenschaft der Binomialkoeffizienten: Für beliebige $n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$. Formulieren Sie diese Aussage als Eigenschaft des Pascalschen Dreiecks!

11. Beweisen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes: Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $(1+x)^n > 1 + n\,x$. (Es ist dies eine etwas schwächere Aussage als die Bernoullische Ungleichung.)

12. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Sind die n (≥ 2) reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entweder alle positiv oder alle negativ, aber alle > -1, so gilt

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) > 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

13. Zeigen Sie, dass die Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl entweder wieder eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl ist! Sie dürfen dabei die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen ≥ 1 verwenden.
Tipp: Ist $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = n \in \mathbb{N}^*$ für $p, q \in \mathbb{N}^*$, so folgt $p^2 = n\,q^2$. Die Frage, wie oft die Primfaktoren von n auf der linken und auf der rechten Seite vorkommen, führt direkt zum Beweis!

14. Je nachdem, wie die reellen Zahlen in einer Vorlesung oder in einem Lehrbuch eingeführt werden, sind manche Sätze leicht zu beweisen und andere schwierig. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

    (i) Sind a und b positive reelle Zahlen, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $n\,a > b$.
    (Diese Aussage wird „Archimedisches Axiom“ genannt, ist aber in unserem Zugang kein Axiom.)

    (ii) Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegen stets unendlich viele rationale Zahlen.

15. Zuletzt die leichteste Aufgabe dieses Übungszettels: Wie viele Teilmengen besitzt eine n-elementige Menge?