Universität Wien, SS 2017

Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

Übungstermin 2

1. Zeigen Sie, dass durch $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $h(n) = n^2 - 4n + 5$ eine Funktion definiert ist!

2. Ermitteln Sie die Dezimalentwicklungen von $\frac{5}{9}$, $\frac{12}{99}$ und $\frac{12}{13}$!

3. Beweisen Sie, dass für beliebige nichtnegative reelle Zahlen x, y stets die Ungleichung $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ (geometrisches Mittel $\le$ arithmetisches Mittel) erfüllt ist!
   Wann gilt die Gleichheit?

4. Sei $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $x - x^2 \ge 0$ genau dann gilt, wenn $x \in [0, 1]$ ist.

5. Lösen Sie die Ungleichung $(x-2)(x-3)^2 > 0$ über $\mathbb{R}$!

6. Beweisen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \max(\{a,b\}) &= \frac{a+b+|b-a|}{2} \\ \min(\{a,b\}) &= \frac{a+b-|b-a|}{2}. \end{aligned}$$

Anhand der folgenden Aufgaben sollen Sie die Beweismethode der **vollständigen Induktion** üben. Einige der zu beweisenden Aussagen werden später in der Vorlesung benötigt.

7. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2} n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Beweisen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ auf zweierlei Weisen:
   (i) durch vollständige Induktion.
   (ii) durch direkte Berechnung der Summe, unter Verwendung der Identität $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

10. Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $p^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Finden Sie den Fehler im folgenden Induktionsbeweis:
Satz: Für jedes n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von natürlichen Zahlen mit $n \geq 1$ gilt, dass diese Zahlen alle gleich sind: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
Beweis:

    (a) Induktionsvoraussetzung: Die Aussage des Satzes ist für $n = 1$ trivialerweise erfüllt, da nur von einer einzigen Zahl x_1 die Rede ist.

    (b) Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage des Satzes sei für ein n erfüllt. Dann gilt gemäß Induktionsvoraussetzung:

    Die ersten n Zahlen sind gleich: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
    Die letzten n Zahlen sind gleich: $x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$.

    Daher
    $$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1},$$
    womit der Satz bewiesen ist.

12. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich n^2.

13. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:
$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,. \tag{2.1}$$
Diese Formel lässt auch mit anderen Methoden beweisen. Können Sie einen anderen Beweis angeben?