Universität Wien, SS 2017

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Informationen und Beispiel-Aufgaben zur schriftlichen Vorlesungsprüfung

- Die schriftliche Vorlesungsprüfung besteht aus zwei Teilen:
  - 12 Multiple-Choice-Fragen vom Typ 1 aus 4 (1 Punkt) und 2 aus 4 (1.5 Punkte). Es sind 16 Punkte zu erreichen.
  - 4 schriftlich auszuarbeitende Aufgaben (Beweise, Definitionen, Berechnungen). Es sind 16 Punkte zu erreichen.
- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Notenschlüssel:

$16 - 19.9$	genügend
$20 - 23.9$	befriedigend
$24 - 27.9$	gut
$28 - 32$	sehr gut

Beispiele für Multiple-Choice-Fragen

1. [Typ 1 aus 4] Sei A eine nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist $\sup(A) =$
   (a) $\min(\{c \in \mathbb{R} \,|\, x \le c \;\forall x \in A)$
   (b) $\max(A)$
   (c) $\max(\{c \in \mathbb{R} \,|\, x \le c \;\forall x \in A)$
   (d) $\min(\{c \in \mathbb{R} \,|\, x \ge c \;\forall x \in A)$

2. [Typ 2 aus 4] Von den folgenden Aussagen sind zwei richtig. Welche?
   (a) Ist die Folge (a_n) eine Nullfolge und die Folge (b_n) beschränkt, so ist die Folge (c_n) mit $c_n = a_n\, b_n \;\forall n$ ebenfalls eine Nullfolge.
   (b) Gibt es ein $K > 0$ mit $a_{n+1} \ge a_n \ge K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge (a_n) konvergent.
   (c) Gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $a_n \ge a_{n+1} \ge \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge (a_n) konvergent.
   (d) Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent, und ist $a_n \le b_n \;\forall n$, so ist auch jede Folge (c_n) mit $a_n \le c_n \le b_n \;\forall n$ konvergent.

3. [Typ 2 aus 4] Von den folgenden Aussagen sind zwei richtig. Welche?

   (a) Das Intervallschachtelungsprinzip besagt: Ist (I_n) eine Folge von Intervallen mit $I_{n+1} \subseteq I_n$, so existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n \ \forall n$.

   (b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{100}}{1.01^n} = 0$.

   (c) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert genau dann bestimmt gegen ∞, wenn es für jedes $K > 0$ ein $p \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n > K \ \forall n \geq p$.

   (d) Der Satz von Bolzano-Weierstraß besagt: Jede beschränkte reelle Zahlenfolge ist konvergent.

4. [Typ 1 aus 4] Kreuzen Sie die richtige Aussage an:

   (a) Jede auf einem symmetrischen Intervall $[-a, a]$ definierte reelle Funktion ist eine gerade Funktion.

   (b) Jede globale Maximumstelle einer rellen Funktion ist entweder eine lokale Maximumstelle oder eine Randmaximumstelle.

   (c) Jede streng monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

   (d) Eine Funktion $f : A \to B$ heißt surjektiv, wenn es für jedes $x \in A$ mindestens ein $y \in B$ gibt mit $f(x) = y$.

5. [Typ 2 aus 4] Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn

   (a) an jeder Stelle $\eta \in D$ der Grenzwert von f existiert und gleich dem Funktionswert von f ist.

   (b) für jedes $v \in D$ gilt: Für jedes $\kappa > 0$ existiert ein $\lambda > 0$, sodass $|f(z) - f(v)| < \lambda$ für alle $z \in D$ mit $|z - v| < \kappa$.

   (c) sie an jeder inneren Stelle von D stetig ist.

   (d) für jedes $u \in D$ gilt: Für jedes $\tau > 0$ existiert ein $\sigma > 0$ gibt, sodass $|f(z) - f(u)| < \tau$ für alle $z \in D$ mit $|z - u| < \sigma$.

6. [Typ 2 aus 4] Kreuzen Sie die zwei richtigen Aussagen an!

   (a) Ist $f : [c, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend mit nach oben beschränkter Bildmenge, so besitzt f eine Maximumstelle.

   (b) Ist f eine auf $[a, b]$ definierte stetige Funktion mit $f(a)f(b) = -1$, so besitzt f im offenen Intervall (a, b) eine Nullstelle.

   (c) Eine Rechenregel für den Logarithmus lautet: $\log_a(1) = a$.

   (d) Die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall definierten stetigen bijektiven Funktion ist stetig.

7. [Typ 1 aus 4] Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.
   (a) Ist $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist f linksgekrümmt.
   (b) Ist $\xi \in [a,b]$ eine Extremstelle von f, so gilt $f'(\xi) = 0$.
   (c) Ist $f'(\xi) = 0$ für ein $\xi \in (a,b)$, so ist ξ eine lokale Extremstelle.
   (d) Ist $f'(\xi) > 0$ für ein $\xi \in (a,b)$, so gibt es ein Intervall $(\xi, \xi + c) \subseteq (a,b)$, sodass $f(x) > f(\xi)\ \forall x \in (\xi, \xi + c)$.

8. [Typ 2 aus 4] Folgende Aussagen gelten für bestimmte Integrale:
   (a) Ist f integrierbar auf $[a,b]$, so ist $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,dt$ stetig.
   (b) Für $f =$ integrierbar auf $[a,b]$ gilt stets $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ für eine Stammfunktion F von f.
   (c) Ist f stetig auf $[a,b]$, so ist $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar.
   (d) Ist f integrierbar auf $[a,b]$, so ist $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar.

9. [Typ 2 aus 4] Welche der folgenden Aussagen treffen zu?
   (a) Das Quotientenkriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ lautet: Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für fast alle n, so konvergiert die Reihe.
   (b) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für alle x mit $|x| < \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
   (c) $\sqrt{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ für $|x| < 1$.
   (d) $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$

10. [Typ 2 aus 4] Welche der folgenden Aussagen treffen zu?
   (a) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.
   (b) Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent.
   (c) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ ist konvergent.
   (d) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos(n)}$ ist konvergent.

Beispiele für schriftlich auszuarbeitende Aufgaben

1. (5 Punkte) Beweisen Sie:

   Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Zahlenfolgen mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

2. (2 Punkte) Was bedeutet es, dass eine reelle Funktion gleichmäßig stetig ist? Formulieren Sie die genaue Definition!

3. (6 Punkte) Formulieren und beweisen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung! (Sie können dabei den Satz von Rolle voraussetzen.)

4. (3 Punkte) Ermitteln Sie die Taylorreihe der Funktion

   $$(-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   mit Mittelpunkt 0 und geben Sie sie in der Schreibweise mit dem Summensymbol an!