2. Komplexe Zahlen

Franz Embacher
Fakultät für Physik der Universität Wien
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Inhaltsverzeichnis | PDF

Grundrechnungsarten für die komplexen Zahlen

Wir beginnen unseren Streifzug durch die für die Physik wichtigsten mathematischen Methoden mit den komplexen Zahlen. Diese nützlichen Objekte entspringen der Beobachtung, dass es möglich ist, formale Berechnungen mit einer „fiktiven" Zahl durchzuführen, deren Quadrat -1 ist. Wir nennen sie i, die so genannte imaginäre Einheit[1]:

$$i^2 = -1. \tag{2.1}$$

Sind x und y reelle Zahlen, so kann die Kombination $x + i\,y$ gebildet werden – alle Objekte dieser Form bilden die Menge der **komplexen Zahlen**.

> Beispiele für komplexe Zahlen:
> 0, 4, $3+5i$, $3-5i$, $-\frac{1}{2}+3i$, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, i, $-i$, $i\pi$.
> Die ersten zwei Beispiel zeigen, dass auch reelle Zahlen als komplexe Zahlen aufgefasst werden, denn $0 = 0 + 0 \cdot i$ und $4 = 4 + 0 \cdot i$.

Mit Zahlen dieser Art können alle Grundrechnungsarten ausgeführt werden. Die **Summe zweier komplexer Zahlen** $x_1 + i\,y_1$ und $x_2 + i\,y_2$ ist

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{2.2}$$

> Beispiel: $(3+5i)+(2+7i) = 5+12i$.
> Mit der Summe ist auch die **Differenz** zweier komplexer Zahlen definiert:
> $(3+5i)-(2+7i) = 1-2i$.

Das **Produkt zweier komplexer Zahlen** $x_1 + i\,y_1$ und $x_2 + i\,y_2$ kann durch das Ausmultiplizieren der Klammern so berechnet werden, wie wir es auch mit reellen Zahlen tun: $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$. Wird nun noch $i^2 = -1$ verwendet, so ergibt sich

[1] Manchmal wird i als „Wurzel aus -1" bezeichnet, aber das ist ungenau: -1 besitzt in der Menge der komplexen Zahlen zwei Wurzeln: i und $-i$. Auch die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ wollen wir lieber vermeiden.

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+y_1x_2)\,. \tag{2.3}$$

Auch die **Division komplexer Zahlen** ist möglich. Wir führen das anhand eines Beispiels vor:

$$\frac{3-4i}{2+5i}=\frac{(3-4i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{-14-23i}{29}=-\frac{14}{29}-\frac{23}{29}\,i$$

Der Trick dabei ist, den Bruch mit einer komplexen Zahl so zu erweitern, dass die Multiplikation im Nenner auf ein *reelles* Ergebnis führt. (Die entsprechende Multiplikation im Nenner ist farblich hervorgehoben dargestellt). Die allgemeine Regel dafür ist

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2{}^2+y_2{}^2}\,. \tag{2.4}$$

> Beispiel: Die Inverse der Zahl i wird so berechnet: $\frac{1}{i}=\frac{-i}{i\,(-i)}=\frac{-i}{1}=-i$.
>
> (Das gleiche Ergebnis hätte man übrigens auch aus $i\,(-i)=-i^2=1$ erschließen können).

Bei allen bisher durchgeführten Umformungen wurden die für reelle Zahlen geltenden Rechenregeln für die Grundrechnungsarten angewandt, insbesondere jene für das Ausmultiplizieren von Klammern. Mit der Einführung der Zahl i wird **die Menge der reellen Zahlen** unter Wahrung all dieser Regeln **erweitert**.

Was wie eine akademische Spielerei aussieht, hat gewaltige Auswinkungen auf die Mathematik. So ist es beispielsweise möglich, im Rahmen der komplexen Zahlen Gleichungen der Form $x^2=-1$ oder $x^2-2x+3=0$ zu lösen, die im Reellen keine Lösungen besitzen. Carl Friedrich Gauß hat gezeigt, dass auch Gleichungen höherer Ordnung, also etwa $x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0$, *immer* Lösungen im Komplexen besitzen. Dies hat zu einem vertieften Verständnis vieler mathematischer Strukturen geführt, und auch aus der Physik sind die komplexen Zahlen nicht mehr wegzudenken.

Führen wir nun einige Bezeichnungen ein:

- Jede komplexe Zahl z kann in der Form $z=x+iy$ geschrieben werden, wobei x und y reell sind. Diese beiden Zahlen charakterisieren z eindeutig.

  x heißt **Realteil** von z , geschrieben als $\mathrm{Re}(z)$.
  y heißt **Imaginärteil** von z , geschrieben als $\mathrm{Im}(z)$.

- Jene komplexen Zahlen, deren Imaginärteil gleich 0 ist, werden mit den reellen Zahlen identifiziert. In diesem Sinn ist die Menge der reellen Zahlen in der Menge der komplexen Zahlen enthalten.

- Eine komplexe Zahl, deren Realteil gleich 0 ist, wird als **imaginäre Zahl** bezeichnet (Beispiele für imaginäre Zahlen: i , $3i$, $-i$, $i\pi$).

- Ist $z=x+iy$, so heißt

$$z^*=x-iy \tag{2.5}$$

(manchmal auch mit $\bar{z}$ bezeichnet) die zu z **komplex konjugierte** Zahl.

- Der Trick bei der Division in (2.4) bestand darin, dass das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer komplex Konjugierten immer reell ist: $z^* z = (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2$. Die Quadratwurzel aus diesem Produkt wird als (**Absolut**-)**Betrag** von z bezeichnet und in der Form

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.6}$$

  angeschrieben. Weiters merken wir uns, dass $z^* z = |z|^2$ gilt.

- Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Das Computeralgebra-System ***Mathematica*** kann mit komplexen Zahlen rechnen. Dazu wird i einfach mit dem Großbuchstaben `I` eingegeben.

[Aufgabe 1] [Aufgabe 2] [Aufgabe 3] [Aufgabe 4] [Aufgabe 5] [Aufgabe 6]

Die komplexe Zahlenebene

Da jede komplexe Zahl in der Form $x + iy$ geschrieben werden kann, liegt es nahe, sie als Punkt mit den Koordinaten (x, y) in der Zeichenebene, die formal als Menge

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

angeschrieben werden kann, darzustellen. Auf diese Weise bekommt jede komplexe Zahl einen Ort in der Zeichenebene und somit eine **geometrische Darstellung**. Das wird es uns erlauben, beim Umgang mit komplexen Zahlen unsere *Vorstellung* zu Hilfe zu nehmen.

Entsprechend der Identifizierung komplexen Zahl $x + iy$ mit dem Punkt (x, y) wird die x-Achse als **reelle Achse** und die y-Achse als **imaginäre Achse** bezeichnet. Damit werden unsere beiden elementaren Operationen für komplexe Zahlen in der Zeichenebene dargestellt:

- **Addition komplexer Zahlen**:
  Die durch (2.2) beschriebene Addition komplexer Zahlen entspricht der üblichen Addition zweidimensionaler Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

  Sie kann grafisch durch das Aneinanderhängen der entsprechenden Pfeile dargestellt werden.

- **Multiplikation komplexer Zahlen**:
  Mit (2.3) *wird die Zahlenebene mit einer Multiplikation ausgestattet* – das ist nun eine gänzlich neue Struktur, die in der reellen Vektorrechnung unbekannt ist. Die Multiplikationsregel (2.3) kann in Vektorschreibweise auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + y_1x_2 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden. Wir werden weiter unten eine einfache geometrische Interpretation dieser Multiplikation kennen lernen.

Die mit der komplexen Addition und Multiplikation ausgestattete Zeichenebene heißt **komplexe** (**Zahlen**-)**Ebene** (oder **Gaußsche Zahlenebene**). Wir werden diese Ebene mit der Menge $\mathbb{C}$ *identifizieren*.

Zwei der oben betrachteten Begriffe bekommen nur sofort eine geometrische Bedeutung:

- Die zu $z = x + iy$ komplex konjugierte Zahl $z^* = x - iy$ wird aus z durch Spiegelung an der reellen Achse gewonnen.
- Der Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist gleich der Länge der Strecke zwischen dem Ursprung (d.h. der komplexen Zahl 0) und z.

Um die komplexe Multiplikation geometrisch zu interpretieren, ist es nötig, die komplexe Ebene mit anderen Koordinaten zu beschreiben.

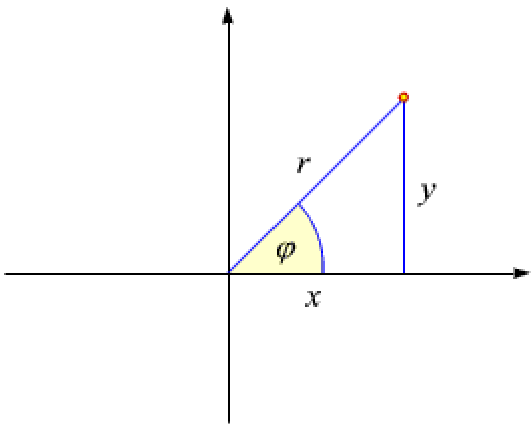
[Aufgabe 7]

Ebene Polarkoordinaten

Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl stellen deren kartesische (rechtwinkelige) Koordinaten dar. Eine in mancher Hinsicht günstigere Darstellung ergibt sich, wenn eine (als zweidimensionaler Vektor aufgefasste) komplexe Zahl durch

- ihren **Betrag** r und
- den Winkel φ, den sie mit der reellen Achse einschließt (das so genannte **Argument**)

charakterisiert wird:



Sind r und φ bekannt, so ergeben sich Real- und Imaginärteil aus dem rechtwinkeligen Dreieck mit Katheten x, y und Hypotenuse r zu

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad (2.7)$$

Sind x und y bekannt, so ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad (2.8)$$

Ein Punkt der Zeichenebene kann daher durch die Angabe der beiden Zahlen (r,φ) beschrieben werden. Wir nennen sie (**ebene**) **Polarkoordinaten** (r heißt **Radialkoordinate**, φ heißt **Winkelkoordinate**).

- Der Bereich, in dem die Winkelkoordinate φ variiert, wird in der Regel entweder mit $0 \le \varphi < 2\pi$ oder $-\pi < \varphi \le \pi$ festgesetzt. Oft ist es aber nützlich, sich nicht festzulegen, sondern beliebige Wert für φ zuzulassen. In diesem Fall muss jeder Wert φ mit $\varphi + 2\pi$ identifiziert werden.
- Am Ursprung gilt $r = 0$, aber der Winkel φ ist unbestimmt.[2]

Mit (2.7) und (2.8) können kartesische in Polarkoordinaten umgerechnet werden und umgekehrt.[3]

Damit kann jede komplexe Zahl in der Form

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (2.9)$$

geschrieben werden. Wir nennen diese Form, eine komplexe Zahlen anzuschreiben, ihre **Polardarstellung**.[4] Dabei ist

$$|\,z\,| = r\,, \qquad (2.10)$$

und für jedes (reelle) φ ist

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (2.11)$$

---

[2] Wir nennen eine solche Situation eine *Koordinatensingularität*.

[3] Tipp für Berechnungen: Soll φ mit Hilfe der Formel (2.8) aus x und y bestimmt werden, so kann die zum Tangens inverse Funktion, der Arcus Tangens (atan; in *Mathematica* `ArcTan`), verwendet werden. Dabei ist allerdings zu bedenken, dass es immer *zwei* Winkel gibt, deren Tangens y/x ist! Sie unterscheiden sich um π, entsprechen also zwei entgegengesetzten Richtungen in der Zeichenebene. Das bedeutet: Durch den Quotienten y/x ist φ *nicht eindeutig* bestimmt! Der Funktionswert $\operatorname{atan}(y/x)$ ist definitionsgemäß jener Winkel, der zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ liegt. Ob es auch der gewünschte ist, hängt von den *Vorzeichen* der Koordinaten x und y ab: Liegt der Punkt (x,y) im ersten oder vierten Quadranten, so ist $\varphi = \operatorname{atan}(y/x)$, liegt (x,y) im zweiten oder dritten Quadranten, so ist $\varphi = \operatorname{atan}(y/x) + \pi$.

[4] Im Kapitel Komplexe Exponentialfunktion werden wir eine kompaktere Variante dieser Schreibweise kennen lernen, die den gleichen Namen trägt.

eine komplexe Zahl vom Betrag 1. Diese beiden Aussagen folgen unter Verwendung der Identität $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ unmittelbar aus (2.9).

Nun lässt sich zeigen, dass das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ durch

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right) \tag{2.12}$$

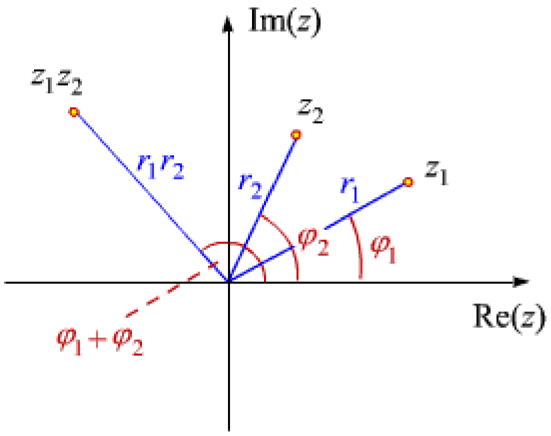
gegeben ist. (Wir verzichten an dieser Stelle auf den Beweis – er folgt aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen Sinus und Cosinus).

Daraus ergibt sich eine einfache **geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation**:

- Der Betrag eines Produkts ist gleich dem *Produkt* $r_1 r_2$ der Beträge der Faktoren.
- Das Argument eines Produkts (d.h. dessen Winkel relativ zur reellen Achse) ist gleich der *Summe* $\varphi_1 + \varphi_2$ der Argumente der Faktoren.

Eine analoge Regel gilt für mehrfache Produkte. Allgemein gilt

$$z_1 z_2 z_3 \ldots = r_1 r_2 r_3 \ldots \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots)\right). \tag{2.13}$$



Aus (2.12) lässt sich unschwer die Regel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) \tag{2.14}$$

für die komplexe Division herleiten, und daraus wiederum folgt sofort die Regel

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right) \tag{2.15}$$

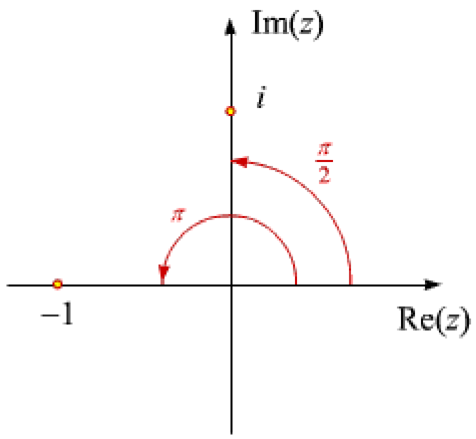
zur Bildung des Kehrwerts.

[Aufgabe 8] [Aufgabe 9] [Aufgabe 10] [Aufgabe 11] [Aufgabe 12] [Aufgabe 13] [Aufgabe 14]

Anwendungen

Um mit den komplexen Zahlen zurande zu kommen, ist es günstig, sowohl auf die algebraischen Rechenmethoden als auch auf die geometrische Darstellung zurückgreifen zu können. Wir demonstrieren das anhand einiger Anwendungen.

- **Beziehungen zwischen komplexen Zahlen geometrisch interpretieren**:
  Regel (2.12) macht es unmittelbar verständlich, warum $i^2 = -1$ ist:



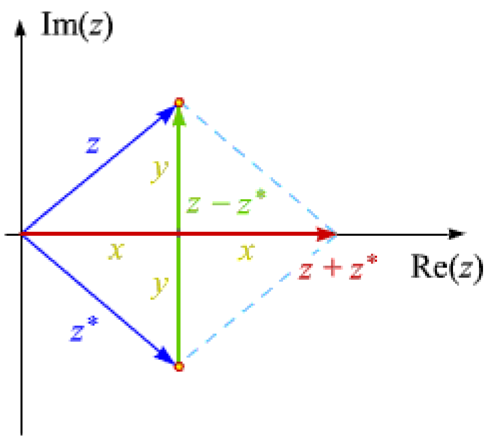
  Aber auch andere Beziehungen zwischen komplexen Zahlen werden geometrisch einsichtig. So zeigt beispielsweise die einfache Rechnung (mit $z = x + iy$)

$$z + z^* = x + iy + x - iy = 2x\,,$$

  dass die Summe aus einer komplexen Zahl und ihrer komplex Konjugierten immer reell ist, und zwar genau gleich dem Doppelten des Realteils. Die Differenz

$$z - z^* = x + iy - (x - iy) = 2iy$$

  hingegen ist immer imaginär, und zwar gleich $2i$ mal dem Imaginärteil von z.
  Geometrisch werden diese Beziehungen so dargestellt:



- **Quadratische Gleichungen**:
  Bekannterweise hat nicht jede reelle quadratische Gleichung, d.h. nicht jede Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

(mit *reellen* p und q) eine reelle Lösung x. Neben dem Standardbeispiel $x^2 + 1 = 0$ ist dies auch aus der Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ersichtlich: Ist die Zahl unter der Wurzel (die Diskriminante) negativ, so existiert keine reelle Lösung. Wird die Gleichung aber über der Menge der komplexen Zahlen betrachtet (d.h. gesucht ist eine *komplexe* Zahl z, für die

$$z^2 + pz + q = 0$$

gilt), so stellt die auch hier geltende Lösungsformel

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (2.16)$$

auch dann kein unüberwindliches Hindernis dar, wenn unter der Wurzel eine negative Zahl auftritt. Führt (2.16) beispielsweise auf $1 \pm \sqrt{-3}$, so wird dies als $1 \pm i\sqrt{3}$ interpretiert, und zwei komplexe Lösungen sind gefunden. Im Grenzfall verschwindender Diskriminante ($\frac{p^2}{4} - q = 0$) besitzt die Gleichung auch im Komplexen nur eine einzige Lösung (die allerdings „zweifach" gezählt wird).

In der Physik ist es manchmal extrem nützlich, die komplexen Lösungen einer Gleichung zu kennen. Wir werden beispielsweise im Kapitel über die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sehen, dass „komplexe Frequenzen", die aus quadratischen Gleichungen gewonnen werden, dazu benutzt werden, um einen gedämpften Schwingungsvorgang zu beschreiben.

Quadratische Gleichungen, für die p und q *komplexe* Zahlen sind, können analog behandelt werden, wobei allerdings unter Umständen die beiden (zueinander negativen) Wurzeln einer komplexen Zahl (der Diskriminante) zu berechnen sind.

Das Computeralgebra-System ***Mathematica*** gibt beim Lösen quadratischer (oder höherer) Gleichungen immer die komplexen Lösungen aus. Beispiel:

```
Solve[x^2-3x+9==0,x]
```

Beachten Sie, dass Gleichungen in *Mathematica* mit einem doppelten Gleichheitszeichen `==` geschrieben werden!

- **Potenzieren und Wurzelziehen**: *
  Aus der geometrischen Multiplikationsregel (2.13) folgt, dass für jede natürliche Zahl n die n-te Potenz der komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ durch

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) \qquad (2.17)$$

gegeben ist (denn z^n ist nichts anderes als das n-fache Produkt von z mit sich selbst). Dieses Formel kann dazu benutzt werden, komplexe Wurzeln zu berechnen. Wir führen dies anhand der „n-ten Einheitswurzeln“ vor:

Beispiel: Gesucht sind jene komplexen Zahlen z, für die $z^n=1$ gilt. Mit (2.17) ist also $r^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right)=1$ zu erreichen. Durch Vergleich der linken mit der rechten Seite folgt erstens $r^n=1$, daher $r=1$. Zweitens muss der Winkel φ die Gleichungen $\cos(n\varphi)=1$ und $\sin(n\varphi)=0$ erfüllen. Das ist genau dann der Fall, wenn $n\varphi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Daher löst für jede ganze Zahl k der Winkel $\varphi=\frac{2\pi}{n}k$ diese beiden Gleichungen. Die Winkel für $k=0,1,2,\ldots n-1$ entsprechen *voneinander verschiedenen* komplexen Zahlen (alle anderen ganzzahligen Werte von k führen auf nichts Neues, sondern reproduzieren diese Zahlen bloß). Damit sind alle n komplexen Zahlen (die „n-ten Einheitswurzeln“) gefunden, für die $z^n=1$ gilt:

$$z=\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right)\qquad(k=0,1,2,\ldots n-1). \tag{2.18}$$

Daraus ergeben sich beispielsweise für $n=3$ die dritten Wurzeln aus 1: Neben der Zahl 1 (für $k=0$) finden wir für $k=1$ und $k=2$ die beiden zueinander komplex konjugierten Zahlen $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\pm i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\equiv-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Damit sind die „dritten Einheitswurzeln“ gefunden. Es sind genau jene drei Zahlen, von denen Aufgabe 13 handelt.

[Aufgabe 15] [Aufgabe 16] [Aufgabe 17] [Aufgabe 18]

Ausblick

Im übernächsten Kapitel Komplexe Exponentialfunktion werden wir zeigen, dass die Polardarstellung (2.9) auch in der Form

$$z=r\,e^{i\varphi} \tag{2.19}$$

geschrieben werden kann. Damit werden wir die Rechenregeln (2.12), (2.14) und (2.15) als triviale Folgerungen der Eigenschaft $e^{i\varphi}e^{i\varphi'}=e^{i(\varphi+\varphi')}$ der Exponentialfunktion geschenkt bekommen.

Aufgaben

1. Gegeben seien $z_1=3+4i$ und $z_2=2-i$. Berechnen Sie z_1+z_2, z_1-z_2, z_1+4z_2, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^*, z_2^*, $|z_1|$ und $|z_2|$.

2. Berechnen Sie i^3, i^4, i^5, i^6, i^7 und i^8. Formulieren Sie eine allgemeine Regel, wie die Folge der Potenzen von i weitergeht.

3. Berechnen Sie das Quadrat der komplexen Zahl $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

4. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen z_1 und z_2 die Rechenregeln $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ und $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ gelten.

5. Zeigen Sie, dass die komplexe Zahl $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$ erfüllt.

6. Zeigen Sie, dass die Divisionsregel (2.4) auch in der Form $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$ geschrieben werden kann.

7. Zeichnen Sie die Punkte 1, i, -1, $-i$, $1+i$, $1-i$ $3+2i$ und $3-2i$ in der komplexen Zahlenebene.

8. Die Polarkoordinaten eines Punktes seien $r = 2$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Berechnen Sie seine kartesischen Koordinaten. Schreiben Sie ihn als komplexe Zahl an.

9. Wie lautet die Gleichung des Einheitskreises in Polarkoordinaten?

10. Geben Sie die komplexe Zahl $-1+i$ in Polardarstellung an.

11. Zeichnen Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 2+i$ und $z_2 = 1+2i$ in der komplexen Zahlenebene. Berechnen Sie ihre Beträge. Konstruieren Sie aus ihnen zeichnerisch (ohne weitere Rechnung!) z_1^*, z_2^*, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_1 z_2$. Benutzen Sie dabei lediglich ein Lineal und einen Winkelmesser (Geo-Dreieck).

12. Geben Sie die komplexe Zahl $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ in Polardarstellung an. Ermitteln Sie ihr Quadrat mit der geometrischen Methode (2.12). Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe 3.

13. Zeichnen Sie die Punkte $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ und $z_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ in der komplexen Zahlenebene. Berechnen Sie ihre dritten Potenzen. Welche Bedeutung haben diese drei Zahlen? Geben Sie ihre Polardarstellungen an.

14. Zeigen Sie, dass (2.15) in der Form $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$ geschrieben werden kann. (Die Inverse einer komplexen Zahl ist ein reelles Vielfaches der komplex Konjugierten).

15. Deuten Sie die Multiplikation $(-i)^2 = -1$ geometrisch.

16. Deuten Sie die Multiplikation $(1+i)^2 = 2i$ geometrisch.

17. Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 6z + 11 = 0$ über $\mathbb{C}$.

18. Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 3z + \frac{25}{4} = 0$ über $\mathbb{C}$.