In wie vielen der 4 möglichen Fälle ist die Aussage wahr?

$(\neg A) \Leftrightarrow (B \vee A)$

Lösung: 1

Wahrheitswert-Tabelle:

	A	B	NICHT (ändert Wahrheitswert)	ODER (nur falsch, wenn beide falsch sind)	ÄQUIVALENT (nur wahr, wenn Wahrheitswerte gleich)
	A	B	$\neg A$	$B \vee A$	$(\neg A) \Leftrightarrow (B \vee A)$
1. A und B falsch	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**
2. A falsch, B wahr	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**
3. A wahr, B falsch	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**
4. A und B wahr	**w**	**w**	**f**	**w**	**f**

$x = \{9,0,1\}$. A_i ist 1 oder 0, je nachdem, ob die i−te Aussage wahr oder falsch ist. $A_1 + 3A_2 + 5A_3 = ?$

(i) $\forall y \in x\ \forall z \in x\ |y-z|<6$ (ii) $\forall y \in x\ \exists z \in x\ |y-z|>2$ (iii) $\exists y \in x\ \forall z \in x\ |y-z|<3$

Lösung: 3

(i) Die erste Aussage ist falsch ($A_1=0$), weil nicht alle Abstände kleiner als 6 sind.

$y=9$:	$z=9$: $\|y-z\|=0<6$ 4	$z=0$: $\|y-z\|=9<6$ 8	$z=1$: $\|y-z\|=8<6$ 8
$y=0$:	$z=9$: $\|y-z\|=9<6$ 8	$z=0$: $\|y-z\|=0<6$ 4	$z=1$: $\|y-z\|=1<6$ 4
$y=1$:	$z=9$: $\|y-z\|=8<6$ 8	$z=0$: $\|y-z\|=1<6$ 4	$z=1$: $\|y-z\|=0<6$ 4

Es reicht aber, wenn man nur den größten Abstand überprüft, nämlich $|9-0|=9$.
Ist dieser kleiner als 6, dann sind auch alle anderen Abstände kleiner als 6 und die Aussage ist wahr.
Ist er größer als 6, dann sind offenbar nicht alle Abstände kleiner als 6 und die Aussage ist falsch.

(ii) Die zweite Aussage ist wahr ($A_2=1$), weil man für jedes y ein z finden kann, sodass $|y-z|>2$.

Für $y=9$ kann man $z=0$ wählen: $|y-z|=9>2$ 4
Für $y=0$ kann man $z=9$ wählen: $|y-z|=9>2$ 4
Für $y=1$ kann man $z=9$ wählen: $|y-z|=8>2$ 4

(iii) Die dritte Aussage ist falsch ($A_3=0$), weil es kein y gibt, dessen Abstand zu jedem z kleiner als 3 ist.

Dass y nicht 9 sein kann, sieht man, wenn man $z=0$ wählt: $|y-z|=9<3$ 8
Dass y nicht 0 sein kann, sieht man, wenn man $z=9$ wählt: $|y-z|=9<3$ 8
Dass y nicht 1 sein kann, sieht man, wenn man $z=9$ wählt: $|y-z|=8<3$ 8

$A_1 + 3A_2 + 5A_3 = 0 + 3\cdot 1 + 5\cdot 0 = 3$

$|(\{8,0,3,7,6\}-\{6,9,1,5,8\})\cup\{5,7,6\}|=?$ **Lösung: 5**

Differenzmenge: $\{8,0,3,7,6\} - \{6,9,1,5,8\} = \{0,3,7\}$

Vereinigungsmenge: $\{0,3,7\} \cup \{5,7,6\} = \{0,3,7,5,6\}$

Anzahl der Elemente: $|\{0,3,7,5,6\}| = 5$

$r = \{(3,8),(6,2),(3,5),(4,2),(5,6)\}$, $V = \{3,4,5,6,8,9\}$, $|r(V)|=?$ **Lösung: 4**

$r(\{3\})=\{8,5\}$, $r(\{4\})=\{2\}$, $r(\{5\})=\{6\}$, $r(\{6\})=\{2\}$, $r(\{8\})=\varnothing$, $r(\{9\})=\varnothing$

Bild von V unter der Relation r: $r(V) = \{8,5,2,6\}$

Anzahl der Elemente: $|r(V)| = 4$

$r = \{(9,3),(9,7),(4,5),(8,5),(5,6)\}$, $W = \{0,2,3,4,5,7\}$, $|r^{-1}(W)|=?$ **Lösung: 3**

$r^{-1}(\{0\})=\varnothing$, $r^{-1}(\{2\})=\varnothing$, $r^{-1}(\{3\})=\{9\}$, $r^{-1}(\{4\})=\varnothing$, $r^{-1}(\{5\})=\{4,8\}$, $r^{-1}(\{7\})=\{9\}$

Urbild von W unter der Relation r: $r^{-1}(W) = \{9,4,8\}$

Anzahl der Elemente: $|\{9,4,8\}| = 3$

$P(\{5,6,7,8,9\})=0.6$, $P(\{8,9\})=0.3$, $P(\{6\})=0.25$, $P(\{5,7\})=?$ **Lösung: 0.05**

$\{8,9\}, \{6\}, \{5,7\}$ disjunkt und $\{8,9\} \cup \{6\} \cup \{5,7\} = \{5,6,7,8,9\}$

$\Rightarrow \quad P(\{8,9\}) + P(\{6\}) + P(\{5,7\}) = P(\{5,6,7,8,9\})$

$\Rightarrow \quad 0.3 + 0.25 + P(\{5,7\}) = 0.6$

$\Rightarrow \quad P(\{5,7\}) = 0.05$

$P(B)=0.1$, $P(A|B)=0.4$, $P(A|B^c)=0.3$, $P(A)=?$ **Lösung: 0.31**

$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)=0.4\cdot 0.1+0.3(1-0.1)=0.31$

$P(A)=0.3$, $P(B|A)=0.3$, $P(C|A\cap B)=0.2$, $P(A\cap B\cap C)=?$ **Lösung: 0.018**

$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)=0.3\cdot 0.3\cdot 0.2=0.018$

F={x,y,z,{3},{ },{3,5,1},{9,3,5,1},{9,5,1}} Sigma−Algebra auf {9,3,5,1}, |x|+|y|+|z|=? **Lösung: 5**

Diese Sigma-Algebra F muss neben der leeren Menge und der Grundmenge Ω alle Komplemente, Durchschnitte und Vereinigungen ihrer Elemente enthalten.

$\emptyset \in F$ 4 , $\Omega=\{9,3,5,1\} \in F$ 4 [1]

$\emptyset^c=\Omega \in F$ 4 , $\{3\}^c=\{9,5,1\} \in F$ 4 , $\{3,5,1\}^c=\{9\} \in F$ **?**, …

$\{3,5,1\} \cap \{9,3,5,1\}=\{3,5,1\} \in F$ 4 , $\{3,5,1\} \cap \{9,5,1\}=\{5,1\} \in F$ **?**, …

$\{3,5,1\} \cup \{9,3,5,1\}=\{9,3,5,1\} \in F$ 4 , $\{3,5,1\} \cup \{9,5,1\}=\{9,3,5,1\} \in F$ 4 , …

Da F eine Sigma-Algebra ist, müssen also auch {9} und {5,1} in F enthalten sein und in weiterer Folge auch {3,9}, weil $\{3,9\}=\{5,1\}^c$ bzw. $\{3,9\}=\{3\} \cup \{9\}$.

|x|+|y|+|z|=|{9}|+|{5,1}|+|{3,9}|=1+2+2=5

[1] Würde Ω noch weitere Elemente enthalten, müssten diese auch in den Komplementen der 5 Mengen {3},{ },{3,5,1},{9,3,5,1},{9,5,1} aufscheinen. F müsste also mindestens noch 5 weitere Teilmengen von Ω enthalten, nicht nur 3 (nämlich x, y und z).

Y binomialverteilt(5,0.2), $P(X=0)=0.7$, $P(X=1)=0.3$, $E(X+3Y-1)=?$ **Lösung: 2.3**

$E(Y)=n\cdot p=5\cdot 0.2=1$, $E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)=0\cdot 0.7+1\cdot 0.3=0.3$

$E(X+3Y-1)=E(X)+E(3Y)+E(-1)=E(X)+3E(Y)-1=0.3+3\cdot 1-1=2.3$

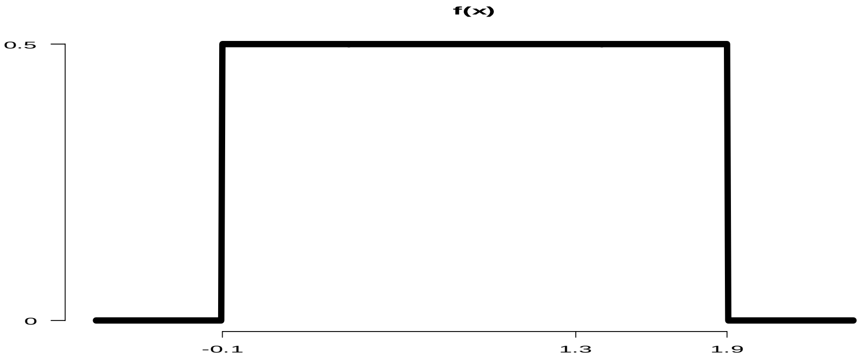
Y binomialverteilt(20,0.3), $P(X=0)=0.5$, $P(X=1)=0.5$, $var(Y)+E(3-2X)^2=?$ **Lösung: 9.2**

$var(Y)=n\cdot p\cdot(1-p)=20\cdot 0.3\cdot 0.7=4.2$, $E(3-2X)^2=(3-2\cdot 0)^2\cdot P(X=0)+(3-2\cdot 1)^2\cdot P(X=1)=9\cdot 0.5+1\cdot 0.5=5$

$var(Y)+E(3-2X)^2=4.2+5=9.2$

X gleichverteilt auf [−0.1,1.9], P(X<1.3)=?

Lösung: 0.7

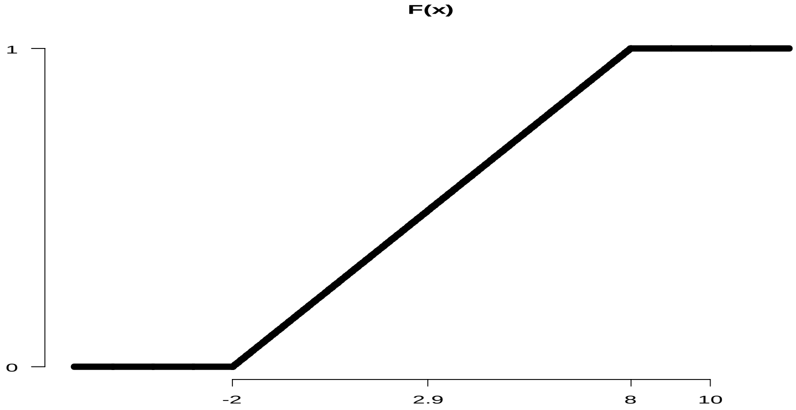


Fläche unter der Dichte = Fläche des Rechtecks mit Breite 1.9–(-0.1) und Höhe c

$\Rightarrow$ 1=(1.9–(-0.1))c=2c $\Rightarrow$ c=0.5

P(X<1.3) = Fläche links von 1.3 = (1.3–(-0.1))c = 1.4·0.5 = 0.7

Verteilungsfunktion von X für $-2<x<8$: $F(x)=0.2+0.1x$, $P(2.9<X<10)=?$ **Lösung: 0.51**



$P(2.9<X<10) = P(X<10) - P(X<2.9) = F(10) - F(2.9) = 1 - (0.2+0.1 \cdot 2.9) = 0.51$

$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. t(8), $\sqrt{6n}\,\overline{X} \to Y$, var(Y)=? **Lösung: 8**

$$\text{CLT: } T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - 0}{\sqrt{\frac{8}{8-2}}} = \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{6}\,\overline{X}}{\sqrt{8}} \to Z \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{6n}\,\overline{X} = \sqrt{8}\,T \to Y = \sqrt{8}\,Z \sim N(0,8)$$

$X \sim \chi^2(3)$, $E(X^2)$=? **Lösung: 15**

$E(X)=3$, $Var(X)=2 \cdot 3$

$var(X)=E(X^2)-(E(X))^2 \Rightarrow E(X^2)=var(X)+(E(X))^2=2\cdot 3+3^2=15$

X,Y unabhängig, $X \sim N(a,b^2)$, $Y \sim N(c,d^2)$, $a=-2$, $b^2=4$, $c=7$, $d^2=7$, $var(2X+Y-5)$=? **Lösung: 23**

$var(2X+Y-5)=var(2X+Y)=var(2X)+var(Y)=2^2 \cdot var(X)+var(Y)=4 \cdot b^2+d^2=4 \cdot 4+7=23$

$EX = -8$, $EY = 9$, $var(X)=4$, $var(Y)=1$, $\rho = -0.1$, $var(19-1X-2Y)=?$ **Lösung: 7.2**

$\rho = cor(X,Y)$

$\rho = cov(X,Y) / \sqrt{var(X)var(Y)} \Rightarrow cov(X,Y) = \rho\sqrt{var(X)var(Y)} = -0.1\sqrt{4\cdot 1} = -0.2$

$var(19-1X-2Y) = var(-X-2Y) = var(X)+var(2Y)+2\cdot cov(-X,-2Y) = var(X)+2^2\cdot var(Y)+2\cdot(-1)(-2)cov(X,Y)$

$= 4+4\cdot 1+4\cdot(-0.2) = 7.2$

X,Y i.i.d. $N(a,b^2)$, $a=0$, $b^2=4$, $var(X^2+Y^2)=?$ **Lösung: 64**

$(X-a)/b$, $(Y-a)/b$ i.i.d. $N(0,1)$ $\Rightarrow$ $((X-a)/b)^2+((Y-a)/b)^2 = X^2/4+Y^2/4 \sim \chi^2(2)$

$\Rightarrow var(X^2/4+Y^2/4)=2\cdot 2=4$

$\Rightarrow var(X^2+Y^2)=var(4(X^2/4+Y^2/4))=4^2\cdot 4=64$

Gemeinsame Dichtefunktion f(x,y)=x+0.3y für 0<x<0.1, 0<y<8 und f(x,y)=0 sonst, 2F(4,1)=? **Lösung: 0.04**

2F(4,1)=2P(X≤4∧Y≤1)=2P(0≤X≤0.1∧0≤Y≤1)

$$= 2\int_0^{0.1}\left(\int_0^1 (x+0.3y)\,dy\right)dx = 2\int_0^{0.1}(xy+0.3\frac{y^2}{2})\Big|_0^1\,dx = \int_0^{0.1}(2xy+0.3y^2)\Big|_0^1\,dx = \int_0^{0.1}(2x+0.3-(0+0))\,dx$$

$$= (2\frac{x^2}{2}+0.3x)\Big|_0^{0.1} = 0.1^2+0.3\cdot 0.1-(0+0) = 0.01+0.03 = 0.04$$

Gemeinsame Dichtefunktion f(x,y)=r+0.8x für 1<x<3, −9<y<−8.8 und f(x,y)=0 sonst, r=? **Lösung: 0.9**

$$1 = \int_1^3\left(\int_{-9}^{-8.8}(r+0.8x)\,dy\right)dx = \int_1^3 0.2(r+0.8x)\,dx = 0.2(rx+0.8\frac{x^2}{2})\Big|_1^3 = 0.2(3r+0.4\cdot 3^2-r-0.4\cdot 1^2) = 0.4r+0.64$$

$$\Rightarrow\ 4r = 10-6.4 = 3.6\ \Rightarrow\ r = 0.9$$

Hinweise: (i) Man kann sich aussuchen, ob man zuerst nach x oder nach y integriert.

(ii) Im Integranden r+0.8x des inneren Integrals kommt kein y vor, r+0.8x ist also eine Konstante.

Das innere Integral ist also die Fläche eines Rechtecks der Länge 0.2 (von -9 bis -8.8) und Höhe r+0.8x.

Gemeinsame Dichtefunktion $f(x,y)=1+1x$ für $1<x<2$, $c<y<d$ und $f(x,y)=0$ sonst, $d-c=?$ **Lösung: 0.4**

$$1 = \int_1^2 \left(\int_c^d (1+x)dy \right) dx = \int_1^2 (d-c)(1+x)dx = (d-c)\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = (d-c)\left(2 + \frac{2^2}{2} - 1 - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{5}{2}(d-c)$$

$$\Rightarrow d-c = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$E(X)=-2$, $E(Y)=-5$, $cov(X,Y)=-12$, $E(XY)=?$ **Lösung: −2**

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \Rightarrow E(XY)=cov(X,Y)+E(X)E(Y)=(-12)+(-2)\cdot(-5)=-2$$

X,Y i.i.d. $N(16,2^2)$, $cov(19+2X,3X-16Y)=?$ **Lösung: 24**

$$\begin{aligned} cov(19+2X,3X-16Y) = cov(2X,3X-16Y) &= cov(2X,3X) + cov(2X,-16Y) \\ &= 2\cdot 3\cdot cov(X,X) + 2\cdot(-16)\cdot cov(X,Y) \\ &= 6\cdot var(X) + 0 \\ &= 6\cdot 2^2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

X,Y,Z i.i.d. $N(10,10^2)$, $\hat{\mu}=0.6X+0.7Y-0.4Z$, $MSE(\hat{\mu})=?$ **Lösung: 102**

$var(\hat{\mu}) = 0.6^2 var(X)+0.7^2 var(Y)+0.4^2 var(Z) = (0.36+0.49+0.16)\cdot 10^2 = 101$

$bias(\hat{\mu}) = E(\hat{\mu}-\mu) = E(\hat{\mu})-\mu = 0.6E(X)+0.7E(Y)-0.4E(Z)-10 = (0.6+0.7-0.4)\cdot 10-10 = 0.9\cdot 10-10 = -1$

$MSE(\hat{\mu}) = var(\hat{\mu}) + bias^2(\hat{\mu}) = 101 + (-1)^2 = 102$

Für die Test−Statistik T gilt unter der Nullhypothese:
$P(T=j)=0.012$ für $j=1,...,4$, $P(T=j)=0.1$ für $j=5,...,9$, $P(T=10)=0.387$, $P(T=j)=0.013$ für $j=11,...,15$.
Zwei Verwerfungsbereiche $[c,\infty)$ und $(-\infty,a] \cup [b,\infty)$ mit a,b,c aus {1,...,15} sind zu wählen.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art soll jeweils möglichst groß sein, aber höchstens 5%. a+b+c=? **Lösung: 29**

$P(T\in[c,\infty))=P(T\geq c)$

c=13: $P(T\geq c) = P(T=13)+P(T=14)+P(T=15) = 0.013+0.013+0.013 = 0.039 \leq 0.05$

$P(T\in(-\infty,a]\cup[b,\infty))=P(T\leq a \vee T\geq b)$

a=2, b=14: $P(T\leq 2 \vee T\geq 14) = P(T=1)+P(T=2)+P(T=13)+P(T=14) = 0.012+0.012+0.013+0.013 = 0.05$

a+b+c = 2+14+13 = 29

$n=25$, $\overline{X}=2$, $((X_1-\overline{X})^2+..+(X_n-\overline{X})^2)/(n-1)=4$, t−Test für H_0: $\mu=1$, Wert der Test−Statistik=? **Lösung: 2.5**

$S^2=((X_1-\overline{X})^2+..+(X_n-\overline{X})^2)/(n-1)=4 \Rightarrow S=2,\ T=\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}=\sqrt{25}\,\frac{2-1}{2}=\frac{5}{2}=2.5$

$\hat{a}, \hat{b}$ LS−Schätzwerte in einer einfachen linearen Regression, $\hat{a}=6$, $\overline{x}=2$, $\overline{y}=0$, $\hat{b}=?$ **Lösung: -3**

$\overline{y}=\hat{a}+\hat{b}\,\overline{x} \Rightarrow 0=6+2\hat{b} \Rightarrow \hat{b}=-3$

$Y_t=a+bt+ct^3+U_t$, $t=1,...,n=13$, $U_1,...,U_n$ i.i.d. $N(0,11)$.

Unter H_0: $b=c=0$ ist die Test−Statistik des F−Tests ~ $F(r,s)$. $r-s=?$ **Lösung: -8**

$k=3$ Regressionskoeffizienten (a, b, c), $n=13 \Rightarrow r=k-1=2$, $s=n-k=10 \Rightarrow r-s=-8$

Eine Gerade $y = a + bx$ beschreibt die Lage der Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ umso besser, je kleiner die Abweichungen $u_1 = y_1 - (a + bx_1), u_2 = y_2 - (a + bx_2), \dots, u_n = y_n - (a + bx_n)$ der Punkte von der Geraden sind. Mit der Methode der kleinsten Quadrate wählt man diejenige Gerade, die die Summe $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$ der quadrierten Abweichungen minimiert. Die Parameter dieser Geraden werden mit $\hat{a}$ und $\hat{b}$ bezeichnet.

Die Abweichungen $\hat{u}_1 = y_1 - (\hat{a} + \hat{b}x_1), \hat{u}_2 = y_2 - (\hat{a} + \hat{b}x_2), \dots, \hat{u}_n = y_n - (\hat{a} + \hat{b}x_n)$ der Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ von der Geraden $y = \hat{a} + \hat{b}x$ erfüllen die Normalengleichungen

$$\hat{u}_1 \cdot 1 + \hat{u}_2 \cdot 1 + \cdots + \hat{u}_n \cdot 1 = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \cdots + \hat{u}_n = 0$$

und

$$\hat{u}_1 x_1 + \hat{u}_2 x_2 + \cdots + \hat{u}_n x_n = 0,$$

welche besagen, dass der Vektor $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n)^T$ der Abweichungen (Residuen) normal steht auf die beiden Vektoren $(1,1,\dots,1)^T$ und $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Beispiel: Mit Hilfe der R-Funktion lm wird eine Gerade an die Punkte (1,3),(2,7),(3,5),(4,8) angepasst.

```
x <- c(1,2,3,4); y <- c(3,7,5,8); h <- lm(y~x)   # Definition der x- und y-Koordinaten der Punkte und Aufruf der Funktion
h$coefficients; h$residuals                     # Ausgabe der Parameter a und b der angepassten Geraden sowie der Residuen
2.5    1.3
-0.8  1.9 -1.4  0.3
```

Es gelten die Normalengleichungen $-0.8 + 1.9 - 1.4 + 0.3 = 0$ und $-0.8 * 1 + 1.9 * 2 - 1.4 * 3 + 0.3 * 4 = 0$.

h <− lm(y~c(0,-3,3,w))   # h$residuals: 1,−1,v,2, w=?

Lösung: 1.5

1. Normalengleichung: 0 = $\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t$ =1–1+v+2 $\Rightarrow$ v=-2

2. Normalengleichung: 0 = $\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t x_t = 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-3) + v\cdot 3 + 2w = 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-3) + (-2)\cdot 3 + 2w$ $\Rightarrow$ w=1.5

h1 <− 5:9−2*c(4,5,4,5,1); h2 <− median(c(rep(0,5),3:9))   # h1[2]+h2=?   **Lösung: −0.5**

h1 = (5,6,7,8,9)–2·(4,5,4,5,1) = (5,6,7,8,9)–(8,10,8,10,2) = (-3,-4,-1,-2,7)
Das 2. Element des Vektors h1 ist -4.

Der Median h2 des Vektors (0,0,0,0,0,3,4,5,6,7,8,9) ist (3+4)/2=3.5.

Die Summe von -4 und 3.5 ist -0.5.

h <− list("abc",pi,2:6,"2000−01−01",c(4,2,1,2,3))   # mean(h[[3]][3:4])+min(h[[5]])=?   **Lösung: 5.5**

1. Element der Liste h: "abc"
2. Element der Liste h: π
3. Element der Liste h: (2,3,4,5,6)
4. Element der Liste h: "2000−01−01"
5. Element der Liste h: (4,2,1,2,3)

Der Mittelwert der 3. und 4. Koordinate des Vektors (2,3,4,5,6) ist (4+5)/2=4.5.
Das Minimum des Vektors (4,2,1,2,3) ist 1.
Die Summe von 4.5 und 1 ist 5.5.

```
h <- cbind(8:12,c(5,3,4,1,4))   # h[4,1]+median(h[,2])=?
```

Lösung: 15

(8,9,10,11,12) und (5,3,4,1,4) werden als Spaltenvektoren zu einer Matrix verbunden.

$$h = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 3 \\ 10 & 4 \\ 11 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Das Element in der 4. Zeile und 1. Spalte der Matrix h ist 11, der Median der 2. Spalte von h ist 4.
Die Summe von 11 und 4 ist 15.

```
A <- rbind(3:7,c(3,0,3,5,1))   # median(h[2,])+h[1,3]=?
```

Lösung: 8

(3,4,5,6,7) und (3,0,3,5,1) werden als Zeilenvektoren zu einer Matrix verbunden.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Median der 2. Zeile von A ist 3, das Element in der 1. Zeile und 3. Spalte der Matrix A ist 5.
Die Summe von 3 und 5 ist 8.