Wenn alle reellen Zahlen mögliche Ergebnisse eines Experiments sind, also der Stichprobenraum $\Omega$ gleich der Menge der reellen Zahlen $\Re$ ist, dann ist es im Allgemeinen unmöglich, für jede Teilmenge von $\Re$ eine Wahrscheinlichkeit anzugeben.

Üblicherweise interessiert man sich aber ohnehin nicht für alle Teilmengen, sondern nur für Intervalle und andere einfache Teilmengen, denen man Wahrscheinlichkeiten zuordnen kann. Solche Teilmengen heißen Ereignisse.

Die leere Menge $\phi$ und der Stichprobenraum $\Omega$ sind auf jeden Fall Ereignisse, weil ihre Wahrscheinlichkeiten immer gegeben sind durch $P(\phi)=0$ und $P(\Omega)=1$. Wenn $A$ ein Ereignis ist, dann ist natürlich auch das Komplement $A^c=\Omega-A$ ein Ereignis. Seine Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch $P(A^c)=1-P(A)$. Wenn $A$ und B disjunkte Ereignisse sind, dann ist auch ihre Vereinigung $A\cup B$ ein Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung ist gegeben durch $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Menge $\mathsf{F}$ aller Ereignisse abgeschlossen ist bezüglich Komplementbildung sowie (endlichen oder abzählbar unendlichen) Vereinigungen und Durchschnitten.

Es gilt dann:

(i) $\phi\in\mathsf{F}$, $\Omega\in\mathsf{F}$,

(ii) $A\in\mathsf{F} \Rightarrow A^c\in\mathsf{F}$,

(iii) $A_1, A_2, A_3,\ldots\in\mathsf{F} \Rightarrow A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\in\mathsf{F}$,

(iv) $A_1, A_2, A_3,\ldots\in\mathsf{F} \Rightarrow A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\in\mathsf{F}$.

Eine Menge $\mathsf{F}$ von Teilmengen von $\Omega\neq\phi$, die die obigen Bedingungen erfüllt, heißt **$\sigma$-Algebra** auf $\Omega$.

Teilmengen von $\Re$, die man mit Komplementbildung, Vereinigung und Durchschnitt aus Intervallen erzeugen kann, heißen Borel-Mengen. Die Menge aller Borel-Mengen ist eine $\sigma$-Algebra auf $\Re$.

**Beispiel:**

$\mathsf{F}$={$x$, $y$, $z$,{2,3},{ },{5,4},{2,5,4},{2,3,5,4}} $\sigma$–Algebra auf {2,3,5,4}, $|x|+|y|+|z|=?$

**Lösung:**

Die $\sigma$–Algebra $\mathsf{F}$ enthält 8 Ereignisse, von denen 3 unbekannt sind. Da $\mathsf{F}$ die Bedingungen (i) – (iv) erfüllen muss, können wir die unbekannten Ereignisse $x$, $y$ und $z$ durch Überprüfung dieser Bedingungen finden.

(i) Offensichtlich gilt $\phi=\{\}\in \mathsf{F}$ und $\Omega=\{2,3,5,4\}\in \mathsf{F}$.

(ii) Die Komplemente der bekannten Ereignisse {2,3}, {}, {5,4} und {2,3,5,4} sind die bekannten Ereignisse {5,4}, {2,3,5,4}, {2,3} und {}. Aber es muss auch das Komplement von {2,5,4}, nämlich {3}, in $\mathsf{F}$ enthalten sein. Wir haben also das erste unbekannte Ereignis gefunden: $x=\{3\}$

(iii) Vereinigungen mit $\phi$ bzw. mit $\Omega$ bringen niemals etwas Neues. Aber auch die anderen Vereinigungen, die man mit den von Anfang an bekannten Ereignissen bilden kann, bringen nichts Neues, z.B. $\{2,3\}\cup\{5,4\}=\{2,3,5,4\}$.

Wenn man allerdings das in (ii) neu gefundene Ereignis $x=\{3\}$ inkludiert, dann erhält man das zweite unbekannte Ereignis: $y=\{5,4\}\cup\{3\}=\{5,4,3\}$

In (ii) konnten wir das Komplement von $y$ nicht überprüfen, weil dieses Ereignis noch unbekannt war. Wenn wir das jetzt nachholen, erhalten wir das dritte unbekannte Ereignis: $z = y^c = \{5,4,3\}^c = \{2\}$

(iv) Die Durchschnitte brauchen wir nicht mehr zu überprüfen, weil wir schon alle 3 unbekannten Ereignisse gefunden haben.

Gefragt war die Summe von $|x|$, $|y|$ und $|z|$.
$|x|$ ist die Anzahl der Elemente von $x$, also 1.
$|y|$ ist die Anzahl der Elemente von $y$, also 3.
$|z|$ ist die Anzahl der Elemente von $z$, also 1.

Die Lösung ist also 1+3+1 = **5.**

**Beispiel:**

F$=\{x, y, z,\{0,3,8,9\},\{0\},\{3,8,9\},\{0,8,9\},\{3\}\}$ $\sigma$–Algebra auf $\{0,3,8,9\}$, $|x|+|y|+|z|=?$

**Lösung:**

Die $\sigma$–Algebra F enthält 8 Ereignisse, von denen 3 unbekannt sind. Da F die Bedingungen (i) – (iv) erfüllen muss, können wir die unbekannten Ereignisse $x$, $y$ und $z$ durch Überprüfung dieser Bedingungen finden.

(i) Offensichtlich ist nur $\Omega=\{2,3,5,4\}$in F enthalten, nicht aber $\phi=\{\}$. Daher ist das erste unbekannte Ereignis gegeben durch $x=\{\}$.

(ii) Die Komplemente $\{0,3,8,9\}^c = \{\}$, $\{0\}^c = \{3,8,9\}$, $\{3,8,9\}^c = \{0\}$, $\{0,8,9\}^c = \{3\}$, $\{3\}^c = \{0,8,9\}$, $\{\quad\}^c = \{0,3,8,9\}$ bringen nichts Neues.

(iii) Durch Vereinigung von $\{0\}$ und $\{3\}$ erhält man das zweite unbekannte Ereignis: $y=\{0\}\cup\{3\}=\{0,3\}$

In (ii) konnten wir das Komplement von $y$ nicht überprüfen, weil dieses Ereignis noch unbekannt war. Wenn wir das jetzt nachholen, erhalten wir das dritte unbekannte Ereignis: $z = y^c = \{0,3\}^c = \{8,9\}$

(iv) Die Durchschnitte brauchen wir nicht mehr zu überprüfen, weil wir schon alle 3 unbekannten Ereignisse gefunden haben.

Gefragt war die Summe von $|x|$, $|y|$ und $|z|$.
$|x|$ ist die Anzahl der Elemente von $x=\{\}$, also 0.
$|y|$ ist die Anzahl der Elemente von $y=\{0,3\}$, also 2.
$|z|$ ist die Anzahl der Elemente von $z=\{8,9\}$, also 2.

Die Lösung ist also 0+2+2 = **4**.

Eine Funktion $P$, die jedem Ereignis $A \in \mathsf{F}$ eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn gilt:

(i) $P(\phi)=0$, $P(\Omega)=1$,

(ii) $P(A^c)=1-P(A)$,

(iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots$, falls die Ereignisse $A_1,A_2,A_3,\ldots$ paarweise disjunkt sind.

Eine Funktion $X$: $\Omega \to \Re$ heißt **Zufallsvariable**, wenn das Urbild jeder Borel-Menge ein Ereignis ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable $X$ einen Wert in einer Borelmenge $B$ annimmt, ist gegeben durch

$$P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}).$$

Spezialfälle:

$$P(a \leq X \leq b)=P(X \in [a,b])=P(X^{-1}([a,b]))$$

$$P(X=c)=P(X \in \{c\})=P(X \in [c,c])=P(X^{-1}([c,c]))$$

Die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ heißen **unabhängig** (ua.), falls

$$P(X \in A \wedge Y \in B) = P(X_1 \in A) \cdot P(X_2 \in B)$$

für alle Borel-Mengen $A$ und $B$.

Der **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen $X$: $\Omega \to \Re$ mit möglichen Werten $x_1,\ldots,x_n$ ist gegeben durch

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + \ldots + x_n P(X = x_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j P(X = x_j).$$

Eigenschaften des Erwartungswerts ($X$, $Y$ Zufallsvariablen, $\lambda \in \Re$):

$$E(\lambda) = \lambda,$$
$$E(\lambda X) = \lambda E(X),$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Eine Zufallsvariable $X$, die den Wert 1 (Erfolg) mit der Wahrscheinlichkeit $p$ und den Wert 0 (Misserfolg) mit der Wahrscheinlichkeit 1-$p$ annimmt, ist **Bernoulli-verteilt** mit Parameter $p$ (Erfolgswahrscheinlichkeit).

Ihren Erwartungswert erhält man durch Summation der möglichen Werte multiplizert mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

Die Summe

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

von $n$ unabhänigen Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$, die eine Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p$ haben, hat eine **Binomialverteilung** mit Parametern $n$ und $p$.

Ihr Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) \\ &= p + \ldots + p = np\,. \end{aligned}$$

Die **Varianz** ist ein Maß für die Streuung einer Zufallsvariablen. Sie ist gegeben durch den Erwartungswert der quadrierten Abweichung vom Erwartungswert:

$$var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$$

Für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable erhält man:

$$\begin{aligned} var(X) &= \big(0 - E(X)\big)^2 P(X = 0) + \big(1 - E(X)\big)^2 P(X = 1) \\ &= (0 - p)^2 (1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p) \end{aligned}$$

Eigenschaften der Varianz ($X$, $Y$ Zufallsvariablen, $\alpha, \beta \in \Re$):

$$var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$var(\alpha + \beta X) = \beta^2 var(X)$$

$var(X + Y) = var(X) + var(Y)$, falls $X$, $Y$ ua.

Ist $X = X_1 + \cdots + X_n$ binomialverteilt mit Parametern $n$ und $p$, dann gilt

$$\begin{aligned} var(X) &= var(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= var(X_1) + \cdots + var(X_n) \\ &= p(1 - p) + \cdots + p(1 - p) = np(1 - p). \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$X \sim B(100,0.6)$, $P(Y=0)=0.4$, $P(Y=-3)=0.5$, $P(Y=3)=0.1$,
$E(4+2X+Y^2)+var(8-X)=?$

**Lösung:**

Die Zufallsvariable $X$ hat eine Binomialverteilung mit den Parametern $n=100$ und $p=0.6$, woraus folgt, dass

$$E(X) = np = 100 \cdot 0.6 = 60$$

und

$$var(X) = np(1-p) = 100 \cdot 0.6 \cdot (1-0.6) = 24.$$

Die Zufallsvariable $Y$ kann nur die Werte 0, −3 und 3 annehmen. Den Erwartungswert von $Y^2$ erhält man durch Summation der quadrierten Werte multiplizert mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 0^2 P(Y=0) + (-3)^2 P(Y=-3) + 3^2 P(Y=3) \\ &= 0 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.5 + 9 \cdot 0.1 = 5.4 \end{aligned}$$

Schließlich erhält man mit Hilfe der Rechenregeln für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\begin{aligned} & E(4 + 2X + Y^2) + var(8 - X) \\ &= E(4) + E(2X) + E(Y^2) + var(-X) \\ &= 4 + 2E(X) + E(Y^2) + var\big((-1)\,X\big) \\ &= 4 + 2 \cdot 60 + 5.4 + (-1)^2 var(X) \\ &= 129.4 + 24 \\ &= \mathbf{153.4} \end{aligned}$$

Nicht benötigt wurde der Erwartungswert von $Y$:

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0\,P(Y=0) + (-3)\,P(Y=-3) + 3\,P(Y=3) \\ &= 0 \cdot 0.4 + (-3) \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.1 = -1.2 \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$X \sim B(100, 0.3)$, $P(Y=0)=0.6$, $P(Y=-3)=0.1$, $P(Y=2)=0.3$,
$E(4-2X+Y^2)+var(7-2X)=?$

**Lösung:**

Die Zufallsvariable $X$ hat eine Binomialverteilung mit den Parametern $n=100$ und $p=0.3$, woraus folgt, dass

$$E(X) = np = 100 \cdot 0.3 = 30$$

und

$$var(X) = np(1-p) = 100 \cdot 0.3 \cdot (1-0.3) = 21.$$

Die Zufallsvariable $Y$ kann nur die Werte 0, −3 und 2 annehmen. Den Erwartungswert von $Y^2$ erhält man durch Summation der quadrierten Werte multiplizert mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 0^2 P(Y=0) + (-3)^2 P(Y=-3) + 2^2 P(Y=3) \\ &= 0 \cdot 0.6 + 9 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.3 = 2.1 \end{aligned}$$

Schließlich erhält man mit Hilfe der Rechenregeln für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\begin{aligned} & E(4-2X+Y^2) + var(7-2X) \\ &= E(4) + E(-2X) + E(Y^2) + var(-2X) \\ &= 4 + (-2)E(X) + E(Y^2) + var\big((-2)\,X\big) \\ &= 4 - 2 \cdot 30 + 2.1 + (-2)^2 var(X) \\ &= -53.9 + 84 \\ &= \mathbf{30.1} \end{aligned}$$