Prädikate

Prädikate unterscheiden sich von Aussagen dadurch, dass in ihnen Variablen frei vorkommen.

Man erhält eine wahre Aussage, wenn man im Prädikat

$$v \in \mathbb{Q}$$

die frei vorkommende Variable v durch eine rationale Zahl ersetzt, beispielsweise durch 3 oder 0.3, und eine falsche Aussage, wenn man v z.B. durch die irrationale Zahl π ersetzt.

Man erhält eine wahre Aussage, wenn man im Prädikat

$$v \in w$$

die frei vorkommende Variable v durch 3 ersetzt und die frei vorkommende Variable w durch $\{1,2,3\}$, und eine falsche Aussage, wenn man v durch -4 ersetzt und w durch $\mathbb{N}$.

Quantoren

Bindet man die in Prädikaten frei vorkommenden Variablen mit Hilfe von Quantoren, so erhält man Aussagen, die wahr oder falsch sein können.

Bindet man die im Prädikat

$$v \in \mathbb{Q}$$

frei vorkommende Variable v mit dem Existenzquantor $\exists$, so erhält man die Aussage

$$\exists v \; (v \in \mathbb{Q}),$$

die wahr ist, weil ja tatsächlich mindestens ein v existiert, beispielsweise die Zahl 3, die ein Element der Menge der rationalen Zahlen ist.

Bindet man hingegen die Variable v mit dem Allquantor $\forall$, so erhält man die Aussage

$$\forall v \; (v \in \mathbb{Q}),$$

die falsch ist, weil ja nicht für jedes beliebige v gilt, dass es ein Element der Menge der rationalen Zahlen ist, beispielsweise ist π keine rationale Zahl.

Übungsbeispiele

Die Aussage

$$\forall i \; (i \in \{0,3,4\} \Longrightarrow i < 5),$$

abgekürzt

$$\forall i \in \{0,3,4\} \; (i < 5),$$

ist wahr, weil alle Elemente der Menge $\{0,3,4\}$ kleiner als 5 sind.

Die Aussage

$$\exists i \; (i \in \{0,3,4\} \land i < 3),$$

abgekürzt

$$\exists i \in \{0,3,4\} \; (i < 3),$$

ist wahr, weil mindestens ein Element der Menge $\{0,3,4\}$, beispielsweise 0, kleiner als 3 ist.

Die Aussage

$$\forall i \in \{0,3,4\} \; (i < 3)$$

ist falsch, weil mindestens ein Element der Menge $\{0,3,4\}$, beispielsweise 4, nicht kleiner als 3 ist. Es sind also nicht alle Elemente kleiner als 3.

Die Aussage

$$\exists i \in \{0,3,4\} \; (i < 0)$$

ist falsch, weil nicht einmal das kleinste Element der Menge $\{0,3,4\}$, nämlich 0, kleiner als 0 ist. Es gibt also kein Element dieser Menge, das kleiner als 0 ist.

Es sei M die Menge $\{3,4,8\}$.

Die Aussage

$$\forall i \in M\ (\forall j \in M\ (|i - j| < 5))$$

ist falsch, weil es ein Element $i \in M$, nämlich 3, und ein Element $j \in x$, nämlich 8, gibt, deren Abstand

$$|i - j| = |3 - 8| = 5$$

nicht kleiner als 5 ist.

Die Aussage

$$\forall i \in M\ (\exists j \in M\ (|i - j| > 3))$$

ist wahr, weil es zu jedem Element $i \in M$ einen Partner $j \in M$ gibt, der weiter als 3 von i entfernt ist. Ein zu 3 passender Partner mit einem Abstand von $|3 - 8| = 5 > 3$ ist 8, ein zu 4 passender Partner mit einem Abstand von $|4 - 8| = 4 > 3$ ist 8, ein zu 8 passender Partner mit einem Abstand von $|8 - 3| = 5 > 3$ ist 3.

Die Aussage

$$\exists i \in M\ (\forall j \in M\ (|i - j| < 3))$$

ist falsch, weil es kein Element $i \in M$ gibt, das zu allen Elementen $j \in M$ einen Abstand kleiner als 3 hat. Das Element 3 kommt nicht in Frage, weil es einen zu großen Abstand zum Element 8 hat, das Element 4 kommt nicht in Frage, weil es auch einen zu großen Abstand zum Element 8 hat, und schließlich kommt auch das Element 8 nicht in Frage, weil es einen zu großen Abstand zum Element 3 hat,

Die Aussage

$$\exists i \in M\ (\exists j \in M\ (|i - j| < 1))$$

ist wahr, weil es ein Element $i \in M$ gibt, beispielsweise 3, zu dem wir einen Partner $j \in M$ finden können, der weniger als 1 entfernt ist. Ein zum Element 3 passender Partner ist das Element 3 selbst.