Logik und Mengenlehre

Mengenlehre[1]

Am Anfang war das Nichts

Die leere Menge[2] enthält keine Elemente:

$$\phi = \{\ \}$$

Die natürlichen Zahlen[3] 0, 1, 2, 3, ...

0 wird definiert als die leere Menge.

1 wird definiert als Menge mit einzigem Element 0.

2 wird definiert als Menge mit den Elementen 0 und 1.

3 wird definiert als Menge mit den Elementen 0, 1, 2.

$$\vdots$$

$$0 = \phi$$

$$1 = \{0\} = \{\phi\}$$

$$2 = \{0,1\} = \{\phi,\{\phi\}\}$$

$$3 = \{0,1,2\} = \{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

$$\vdots$$

[1] set theory
[2] empty set
[3] natural numbers

Die Element-Beziehung

Aussagen über Mengen werden mit Hilfe der Beziehung $\in$ gemacht.

Beispielsweise ist

$$3 \in \{0,1,2\} \qquad \text{(3 ist ein Element[4] von } \{0,1,2\}\text{)}$$

eine falsche Aussage und

$$3 \in \{2, 3\}$$

eine wahre Aussage.

[4] element

Aussagenlogik[5]

Junktoren[6]

Die Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ verbinden zwei Aussagen A und B:

$A \wedge B$	(A und B)
$A \vee B$	(A oder B)
$A \Rightarrow B$	(A impliziert B)
$A \Leftrightarrow B$	(A ist äquivalent zu B)

Der Junktor $\neg$ verneint eine Aussage A:

$\neg A$	(nicht A)

[5] propositional logic
[6] logical connectives

Wahrheitswerte[7]

$A \wedge B$ ist nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

$A \vee B$ ist nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind.

$A \Rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr ist und B falsch.

$A \Leftrightarrow B$ ist nur dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert haben.

$\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.

[7] truth values

Wahrheitswert-Tabellen[8]

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
f	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f
w	w	w	w	w	w	f

Tautologien[9]

Die folgende Wahrheitswert-Tabelle zeigt, dass eine Aussage der Form

$$A \vee (\neg A) \qquad \text{(tertium non datur)}$$

eine Tautologie ist, d.h. sie ist in jedem Fall wahr.

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
f	w	w
w	f	w

[8] truth tables
[9] tautologies

Eine Aussage der Form

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B \qquad \text{(modus ponens)}$$

ist ebenfalls in jedem Fall wahr, unabhängig davon ob die Aussagen A und B wahr oder falsch sind.

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
f	f	w	f	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
w	w	w	w	w

Der Kettenschluss

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

ist ein weiteres Beispiel einer Tautologie.

Weitere Junktoren

Der Junktor $\overline{\vee}$ verbindet zwei Aussagen A und B:

$A \mathbin{\overline{\vee}} B$ (weder A noch B)

$A \mathbin{\overline{\vee}} B$ ist nur dann wahr, wenn weder A noch B wahr sind.

Mit dem Junktor $\overline{\vee}$ (*not or* bzw. *nor*) lassen sich alle andere Junktoren darstellen. Dasselbe gilt auch für den Junktor $\overline{\wedge}$ (*not and* bzw. *nand*).

A	B	$A \mathbin{\overline{\vee}} B$	$A \mathbin{\overline{\wedge}} B$
f	f	w	w
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	f	f

Beispielsweise kann wegen

A	$A \mathbin{\overline{\vee}} A$
f	w
w	f

$\neg A$ dargestellt werden durch $A \mathbin{\overline{\vee}} A$ und wegen

A	B	$A \mathbin{\overline{\vee}} A$	$B \mathbin{\overline{\vee}} B$	$(A \mathbin{\overline{\vee}} A) \mathbin{\overline{\vee}} (B \mathbin{\overline{\vee}} B)$
f	f	w	w	f
f	w	w	f	f
w	f	f	w	f
w	w	f	f	w

kann $A \wedge B$ dargestellt werden durch $(A \mathbin{\overline{\vee}} A) \mathbin{\overline{\vee}} (B \mathbin{\overline{\vee}} B)$.

Prädikatenlogik[10]

Quantoren[11]

Ob

$$3 \in x$$

wahr ist, hängt davon ab, welche Menge x ist.
Für manche Mengen erhält man eine wahre Aussage, z.B. für

$$x = \{2,3\},$$

und für andere Mengen eine falsche Aussage, z.B. für

$$x = \{0,1,2\}.$$

Jedenfalls existieren Mengen, die 3 als Element enthalten.

[10] predicate logic
[11] quantifiers

Mit dem Existenzquantor[12] $\exists$ kann das wie folgt formuliert werden:

$$\exists x\left(3 \in x\right) \qquad \text{(es existiert ein } x\text{, sodass } 3 \in x\text{)}$$

Die Verwendung des Allquantors[13] $\forall$ würde hingegen zur falschen Aussage

$$\forall x\left(3 \in x\right) \qquad \text{(für alle } x \text{ gilt, dass } 3 \in x\text{)}$$

führen, deren Verneinung

$$\neg\left(\forall x\left(3 \in x\right)\right) \qquad \text{(nicht für alle } x \text{ gilt, dass } 3 \in x\text{)}$$

aber wieder eine wahre Aussage wäre.

[12] existential quantifier
[13] universal quantifier

Prädikate[14]

$$3 \in x$$

ist ein 1-stelliges Prädikat. Es kommt 1 freie Variable vor, nämlich x.

$$\exists x\left(x \in y\right)$$

ist auch nur ein 1-stelliges Prädikat, weil zwar y frei vorkommt, die andere Variable x aber durch den Quantor $\exists$ gebunden ist.

$$x \in y$$

ist ein 2-stelliges Prädikat.

$$\forall x\left(x \in y \wedge x \in z\right)$$

ist ebenfalls ein 2-stelliges Prädikat.

$$(x \in y) \Rightarrow (x \in z)$$

ist ein 3-stelliges Prädikat.

[14] predicates

Definitionen

Das 2-stellige Prädikat

$x \subseteq y$ (x ist eine Teilmenge[15] von y)

wird definiert durch

$$\forall z\left(z \in x \Rightarrow z \in y\right).$$

$x = y$ (x ist gleich y)

wird definiert durch

$$(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x).$$

$x \neq y$ (x ist ungleich y)

wird definiert durch

$$\neg(x = y)$$

$x \notin y$ (x ist nicht Element von y)

wird definiert durch

$$\neg(x \in y).$$

[15] subset

Beispiele

Wahre Aussagen sind:

$\forall x \in \{1,2\}\left(x \neq 5\right)$ (Abkürzung für: $\forall x\left(x \in \{1,2\} \Rightarrow x \neq 5\right)$

$\exists x \in \{1,2\}\left(x = 1\right)$ (Abkürzung für: $\exists x\left(x \in \{1,2\} \wedge x \neq 1\right)$

$\exists x\left(\forall y\left(y \notin x\right)\right)$ (gilt für $x=\phi$)

Falsche Aussagen sind:

$\forall x \in \{1,2\}\left(x \neq 1\right)$

$\exists x \in \{1,2\}\left(x = 0\right)$

$\forall x\,(\exists y\,(y \in x))$ (gilt nicht für $x=\phi$)

Der Allquantor $\forall$ kann auch durch $\neg\exists\neg$ dargestellt werden und umgekehrt kann der Existenzquantor $\exists$ durch $\neg\forall\neg$ dargestellt werden.

Beispiele:

$$\forall x(x = x) \Leftrightarrow \neg\exists x(x \neq x)$$

$$\exists x(x = x) \Leftrightarrow \neg\forall x(x \neq x)$$

Mengenalgebra

Es existiert eine Menge y, die alle Mengen x enthält, für die $x \subseteq \{1,2,3\}$ gilt:

$$y = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Auch für jede andere Menge z existiert die Menge all ihrer Teilmengen. Diese wird die Potenzmenge[16] von z genannt und geschrieben als

$$\mathsf{P}(z) = \{x : x \subseteq z\}.$$

Beispiele:

$\mathsf{P}(\{5,8\}) = \{\phi, \{5\}, \{8\}, \{5,8\}\}$

$\mathsf{P}(\phi) = \{\phi\}$

[16] power set

Sind x und y Mengen, dann existieren auch ihre Durchschnittsmenge[17]

$$x \cap y = \{z : (z \in x) \wedge (z \in y)\},$$

ihre Vereinigungsmenge[18]

$$x \cup y = \{z : (z \in x) \vee (z \in y)\}$$

und ihre Differenzmenge[19]

$$x - y = \{z : (z \in x) \wedge (z \notin y)\}.$$

Ist y eine Teilmenge von x, dann heißt

$$y^c = x - y$$

das Komplement[20] von y in x.

[17] intersection
[18] union
[19] difference
[20] complement

Distributivitätsgesetze[21]

Aus dem Distributivitätsgesetz der Aussagenlogik

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

folgt das Distributivitätsgesetz der Mengenalgebra:

$$\begin{aligned} x \cap (y \cup z) &= \{h : (h \in x) \wedge (h \in y \cup z)\} \\ &= \{h : (h \in x) \wedge ((h \in y) \vee (h \in z))\} \\ &= \{h : ((h \in x) \wedge (h \in y)) \vee ((h \in x) \wedge (h \in z))\} \\ &= \{h : (h \in x \cap y) \vee (h \in x \cap z)\} \\ &= \{h : h \in (x \cap y) \cup (x \cap z)\} \\ &= (x \cap y) \cup (x \cap z)\,. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

aus

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)\,.$$

[21] distributive laws

De Morgansche Gesetze[22]

Aus dem De Morganschen Gesetz der Aussagenlogik

$$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

folgt das De Morgansche Gesetz der Mengenalgebra:

$$\begin{aligned} z - (x \cap y) &= \{h : (h \in z) \wedge (h \notin (x \cap y))\} \\ &= \{h : (h \in z) \wedge (\neg(h \in (x \cap y)))\} \\ &= \{h : (h \in z) \wedge (\neg((h \in x) \wedge (h \in y)))\} \\ &= \{h : (h \in z) \wedge ((\neg(h \in x)) \vee (\neg(h \in y)))\} \\ &= \{h : (h \in z) \wedge ((h \notin x) \vee (h \notin y))\} \\ &= \{h : ((h \in z) \wedge (h \notin x)) \vee ((h \in z) \wedge (h \notin y))\} \\ &= \{h : (h \in (z - x)) \vee (h \in (z - y))\} \\ &= (z - x) \cup (z - y)\,. \end{aligned}$$

Analog gilt: $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$$z - (x \cup y) = (z - x) \cap (z - y)$$

[22] De Morgan's laws

[23] Text auf grünem Hintergrund kann übersprungen werden.

.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
f	f	f	f	f	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	f	f	f	f	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w	w

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
f	f	f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w	w
w	w	w	f	f	f	f	w

Relationen[24]

Bei dem durch

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

definierten geordneten Paar zweier Mengen x und y kommt es auf die Reihenfolge an, z. B. ist also

$$(2,3)\neq(3,2)$$

im Gegensatz zu

$$\{2,3\}=\{3,2\}.$$

Sind x und y Mengen, dann existiert auch ihr kartesisches Produkt[25]

$$x\times y=\{z:\exists u\in x\left(\exists v\in y\ \left(z=(u,v)\right)\right)\}.$$

Beispielsweise ist

$$\{3,4,5\}\times\{0,4\}=\{(3,0),(3,4),(4,0),(4,4),(5,0),(5,4)\}.$$

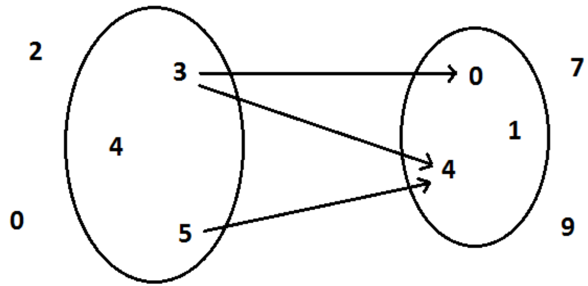
[24] relations
[25] Cartesian product

Eine Teilmenge r von $x\times y$ heißt Relation zwischen x und y.

Zum Beispiel ist

$$r=\{(3,0),(3,4),(5,4)\}$$

eine Relation zwischen $\{3,4,5\}$ und $\{0,1,4\}$.



Das Urbild[26] von z unter r ist gegeben durch

$$r^{-1}(z) = \{u : \exists v \in z\ \big((u,v) \in r\big)\}$$

und das Bild[27] von w unter r durch

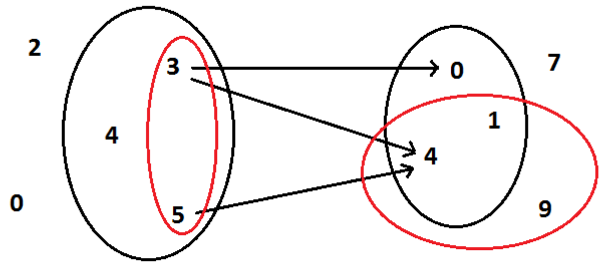
$$r(w) = \{v : \exists u \in w\ \big((u,v) \in r\big)\}.$$

Z.B. ist bei der Relation

$$r = \{(3,0),(3,4),(5,4)\}$$

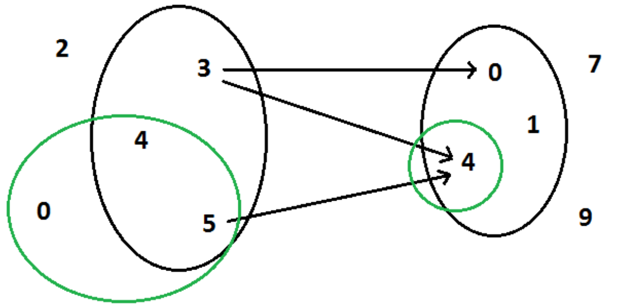
zwischen $\{3,4,5\}$ und $\{0,1,4\}$ das Urbild von $\{1,4,9\}$ gegeben durch

$$r^{-1}(\{1,4,9\}) = \{3,5\}$$



und das Bild von $\{0,4,5\}$ durch

$$r(\{0,4,5\}) = \{4\}.$$



---

[26] inverse image
[27] image

Funktionen[28]

Eine Relation f zwischen x und y heißt Funktion von x nach y, falls das Bild jeder einelementigen Teilmenge von x einelementig ist.

Zum Beispiel ist die Aussage

$$f : \{0,1,2\} \to \{1,2,4,5\}$$

(f ist eine Funktion von {0,1,2} nach {1,2,4,5})

wahr für

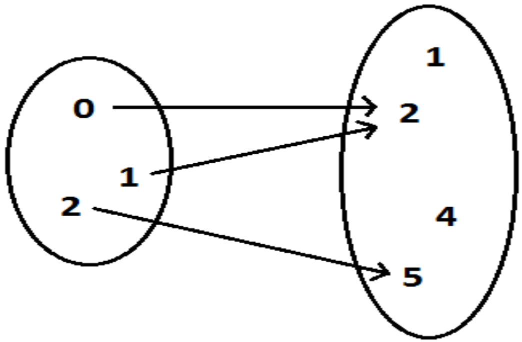
$$f = \{(0,2),(1,2),(2,5)\},$$

weil

$$f(\{0\}) = \{2\}, \quad f(\{1\}) = \{2\}, \; f(\{2\}) = \{5\}$$

einelementig sind.

[28] functions



Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, dann schreibt man abkürzend

$$f(0)=2,\ f(1)=2,\ f(2)=5$$

statt

$$f(\{0\})=\{2\},\ f(\{1\})=\{2\},\ f(\{2\})=\{5\}.$$

Beispiele

Die Aussage

$$f : \{0,1,2\} \to \{1,2,4,5\}$$

ist falsch für

- $f = \{(0,4),(1,4),(1,5),(2,5)\}$,

weil $f(\{1\}) = \{4,5\}$ zweielementig ist,

- $f = \{(0,4),(1,4)\}$,

weil $f(\{2\}) = \phi$ nullelementig ist,

- $f = \{(0,2),(1,2),(2,5),(3,4)\}$,

weil f keine Teilmenge von $x \times y$ ist,

und wahr für

- $f = \{(0,5),(1,4),(2,4)\}$.

Für $x = \{2,4,6,8\}$ und $y = \{7,8,9\}$ sind

- $\{(2,7),(2,8),(4,9)\}$,
- $\{(2,8),(4,8),(6,8),(8,8)\}$,
- $x \times y$,
- ϕ,
- $\{(8,8)\}$

Relationen zwischen x und y, nicht aber

- $\{(7,2),(8,2),(9,4)\}$,
- $\{(2,7),(2,8),(7,9)\}$,
- $\{(3,3),(8,8)\}$.

Für $r = \{(2,7),(2,8),(4,9)\}$ sind z.B.

- $r^{-1}(\{7,8\}) = \{2\}$,
- $r^{-1}(\{5,7,9,11,13\}) = \{2,4\}$,
- $r^{-1}(\phi) = \phi$

Urbilder und

- $r(\{2,6,10\}) = \{7,8\}$,
- $r(\{2,4\}) = \{7,8,9\}$,
- $r(\{6,8\}) = \phi$

Bilder.

Für $f = \{(2,0),(3,0),(4,2)\}$ sind z.B.

- $f^{-1}(\{0,1\}) = \{2,3\}$,
- $f^{-1}(\{0,2\}) = \{2,3,4\}$,
- $f^{-1}(\phi) = \phi$

Urbilder und

- $f(\{0,1,2,3\}) = \{0\}$,
- $f(\{2,3,4\}) = \{0,2\}$,
- $f(\{3\}) = \{0\}$

Bilder.

Russelsche Antinomie[29]

Es existiert keine Menge *y*, die alle Mengen *x* enthält, für die $x \notin x$ gilt.

Im Fall der Existenz einer solchen Menge

$$y = \{x : x \notin x\}$$

wären sowohl

$$y \in y \quad \Rightarrow \quad y \notin \{x : x \notin x\} \quad \Rightarrow \quad y \notin y$$

als auch

$$y \notin y \quad \Rightarrow \quad y \in \{x : x \notin x\} \quad \Rightarrow \quad y \in y \, .$$

gültig.

Die Unvereinbarkeit (Antinomie) dieser beiden Aussagen ergibt sich daraus, dass jede Aussagen-verbindung der Form

$$(A \Rightarrow (\neg A)) \wedge ((\neg A) \Rightarrow A)$$

eine Kontradiktion[30] ist, d.h. sie ist in jedem Fall falsch.

Das Problem ist, dass es hier nicht so wie bei

$$P(x) \, , \;\; x \cap y \, , \;\; x \cup y \;\text{ und }\; x \times y$$

eine Einschränkung der möglichen Elemente der zu bildenden Menge durch die vorgegebenen Mengen *x* und *y* gibt. Dementsprechend verursacht auch die Existenz von $\{x : (x \in y) \wedge (x \notin x)\}$ kein Problem, falls *y* existiert.

---

[29] Russell's antinomy (or Russell's paradox)

[30] contradiction

Die freie Software R kann von *www.r-project.org* heruntergeladen und dann installiert werden.

Nach dem Starten von R kann beispielsweise der Befehl

3+4+1+5

eingegeben werden (durch Eintippen und Drücken der Enter-Taste), woraufhin das Ergebnis, also die Summe der Zahlen 3, 4, 1 und 5, angezeigt wird:

13

Ebenso wird nach Eingabe des Befehls

c(1,0,7,3)+4:7

die Summe der beiden Vektoren (1,0,7,3) und (4,5,6,7) angezeigt:

5 5 13 10

Hingegen wird nach Eingabe des Befehls

x <- 2*c(0,3,4,1,1)

das Ergebnis nicht angezeigt, sondern unter dem Namen x abgespeichert. Mit dem Zuweisungspfeil <- (< und -) wird ein neues Objekt x erzeugt, das jederzeit durch Eingabe seines Namens angezeigt werden kann.

Mehrere Befehle in einer Zeile müssen durch Strichpunkte getrennt werden.

Nach Eingabe der Befehle

x[1:3]; x[5]; x

werden die ersten drei Komponenten von x, die fünfte Komponente von x sowie der ganze Vektor x angezeigt:

0 6 8
2
0 6 8 2 2

Die Funktionen rbind und cbind verbinden einzelne Vektoren zeilenweise bzw. spaltenweise zu einer Matrix.

```
A <- cbind(1:3,c(1,1,1),5:3,c(0,1,1)); A
     1  1  5  0
     2  1  4  1
     3  1  3  1
A[1:2,3]   # erste zwei Komponenten der 3. Spalte von A
     5  4
A[2,]   # ganze zweite Zeile von A
     2  1  4  1
```

[31]

[31] R ignoriert Text nach dem Nummernzeichen

```
B <- rbind(1:3,c(1,1,1),5:3,c(0,1,1)); B
     1  2  3
     1  1  1
     5  4  3
     0  1  1
B[,3]   # ganze dritte Spalte von B
     3  1  3  1
```

Mit der Funktion data.frame kann man zu einer Matrix von Zahlen, wie z.B. A, eine Spalte anderen Typs, z.B. eine Datums-Spalte, hinzufügen:

```
z <- c("2017-03-13","2017-03-14","2017-03-15")
    # z ist ein Text-Vektor.
d <- as.Date(z)   # Umwandlung in Datums-Vektor
F <- data.frame(d,A); F
   2017-03-13  1  1  5  0
   2017-03-14  2  1  4  1
   2017-03-15  3  1  3  1
```

Das neue Objekt F ist keine Matrix mehr, sondern ein **Data Frame**, weil nicht alle seine Spalten vom gleichen Typ sind.

Mit der Funktion list kann man Objekte verschiedenen Typs und verschiedener Dimension zusammenfassen.

```
L <- list(3.08,A,4:9,z,F,d)
L[[1]]      #  erste Komponente der Liste L
  3.08
L[[3]]      # dritte Komponente der Liste L
  4 5 6 7 8 9
L[[3]][2:3]   # Teilvektor der dritten Komponente
  5 6
```

Logische Operatoren: ! (nicht), & (und), | (oder)

```
1<3
   TRUE
!(1<3)
   FALSE
(1<3)&(1<0)
   FALSE
(1<3)|(1<0)
   TRUE
```

```
x <- c(1<3,3==4,3==3,!(1<3),1<0)
x
   TRUE  FALSE  TRUE  FALSE  FALSE
which(x)    # Indices der wahren Aussagen
   1  3
length(which(x))   # Länge des Vektors which(x)
                   # = Anzahl der wahren Aussagen
   2
```

Quiz

In wie vielen der 4 möglichen Fälle ist $(A \Rightarrow (\neg B)) \wedge B$ wahr?

$x=\{3,2,7\}$. Wie viele der folgenden Aussagen sind wahr?
$\forall y \in x\ \forall z \in x\ |y-z|<6$, $\forall y \in x\ \exists z \in x\ |y-z|>2$, $\exists y \in x\ \forall z \in x\ |y-z|<3$ [32]

$x=(\{0,1,2,3,4,5\}-\{2,4,6]\}) \cap \{2,3,4,5\}$, $|x|=?$ [33]

$r=\{(2,3),(5,7),(3,3),(1,2),(2,7)\}$, $x=r^{-1}(\{1,3,5,7\})$, $|x|=?$

$r=\{(1,1),(2,3),(5,7),(2,1),(1,2),(2,7)\}$, $y=r(\{3,7\})$, $|y|=?$

$r=\{(1,3),(8,1),(3,6),(5,1)\}$ Relation zwischen x und $\{v,0,1,2,3\}$. $v=?$

$f=\{(1,7),(u,1),(3,9),(5,4)\}$, $f:\{1,5,4,3\} \to y$, $u=?$

h <- 5:9-2*c(0,2,0,2,0) # R code #   h[4]=?

A <- rbind(5:8,c(-1,-2,-3,9)) # R code # A[2,3]=?

[32] $|y-z|$ bezeichnet den Betrag der Differenz der beiden Zahlen y und z.

[33] Hier bezeichnet $|x|$ nicht den Betrag von x, sondern die Anzahl der Elemente von x.

Lösungen

1 (nur wenn A falsch ist und B wahr)

2 (die 3. Aussage ist falsch)

$x=\{0,1,3,5\} \cap \{2,3,4,5\}=\{3,5\}$, $|x|=2$

$x=\{2,3,5\}$, $|x|=3$

$y=\phi$, $|y|=0$

$v=6$

$u=4$

h=(5,6,7,8,9)-(0,4,0,4,0)=(5,2,7,4,9), h[4]=4

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{A[2,3]=-3}$$