

Lie-Algebra Kohomologie

Dietrich Burde

Lecture Notes 2005

Contents

Historische Einleitung	1
Chapter 1. Die Definition von Lie-Algebra Kohomologie mittels Korandoperator	3
1.1. Die Kohomologiegruppen $H^n(\mathfrak{g}, M)$	3
1.2. Interpretation von $H^1(\mathfrak{g}, M)$	10
1.3. Interpretation von $H^2(\mathfrak{g}, M)$	15
1.4. Interpretation von $H^3(\mathfrak{g}, M)$	23
Chapter 2. Die funktorielle Definition von Lie-Algebra Kohomologie	27
2.1. Kategorien und Funktoren	27
2.2. Die allgemeine Definition	33
2.3. Die Definition im Spezialfall für Lie-Algebren	34
Chapter 3. Anwendungen von Lie-Algebra Kohomologie	37
3.1. Relative Lie-Algebra Kohomologie	37
3.2. Totale Lie-Algebra Kohomologie	38
3.3. Kohomologische Dimension	39
3.4. Betti-Zahlen nilpotenter Lie-Algebren	41
Bibliography	47

Historische Einleitung

Homologie- und Kohomologie-Theorie haben ihren Ursprung in der Topologie des neunzehnten Jahrhunderts. Sie wurde begonnen unter anderem mit den Arbeiten von Riemann (1857), Betti (1871) und Poincaré (1895) über “Homologiezahlen” von Mannigfaltigkeiten. In der Zeit von 1940 – 1955 kam der Aufstieg algebraischer Methoden mit der homologischen Algebra. Die Homologie und Kohomologie von mehreren algebraischen Systemen wurde definiert und studiert: Tor und Ext von algebraischen Gruppen, Homologie und Kohomologie von Gruppen und Lie-Algebren, Kohomologie von assoziativen Algebren, und Garbenkohomologie. Das Buch von Cartan und Eilenberg ([5] 1956) vereint alle bis dahin vereinzelt auftretenden Homologietheorien, indem systematisch derivierte Funktoren verwendet werden, sowie projektive und injektive Auflösungen von Moduln. Es hatte einen enormen Einfluß auf die weitere Entwicklung der homologischen Algebra. Viele neue Theorien entstanden: K -Theorie, Galois Theorie, étale Kohomologie, Galois Kohomologie und so weiter.

Lie-Algebra Kohomologie wurde von Elie Cartan, Claude Chevalley und Samuel Eilenberg erfunden, um die de Rham Kohomologie einer kompakten Lie Gruppe zu berechnen. Cartan hatte gezeigt, daß die Kohomologie von Lie Gruppen auf die von kompakten Lie Gruppen zurückgeführt werden kann. Chevalley und Eilenberg definierten in ihrer Arbeit [9] zunächst die Lie-Algebra Kohomologie $H^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ mit dem trivialem Modul \mathbb{R} , indem sie die de Rham Kohomologie $H_{dR}^n(G, \mathbb{R})$ für eine kompakte zusammenhängende Lie Gruppe G auf Lie-Algebren übertrugen. Dann erhält man einen Isomorphismus $H_{dR}^n(G, \mathbb{R}) \cong H^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, wobei \mathfrak{g} die Lie-Algebra von G ist. Um auch die Kohomologie $H^n(G/H, \mathbb{R})$ der homogenen Räume G/H von G studieren zu können, definierten Chevalley und Eilenberg die Kohomologie $H^n(\mathfrak{g}, M)$ für einen beliebigen \mathfrak{g} -Modul M . Die Arbeit [9] enthält auch schon die Interpretation von $H^2(\mathfrak{g}, M)$ als Lie-Algebra Erweiterungen von \mathfrak{g} durch M , sowie die Deutung der Whitehead Lemmata als $H^1(\mathfrak{g}, M) = H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ für endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebren über einem Körper der Charakteristik Null, und endlich-dimensionalem \mathfrak{g} -Modul M .

Dieses Skript ist als Ergänzung zu einer Grundvorlesung Lie-Algebren und Darstellungstheorie gedacht. Es soll eine elementare Einführung in die Kohomologie von Lie-Algebren geben. Die funktorielle Definition von Kohomologie ist nur übersichtsartig dargestellt. Es wird deshalb oft auf Einzelheiten und Beweise verzichtet. Diese kann man aber in der Standardliteratur nachlesen. In Kapitel 3 fehlen natürlich noch viele Anwendungen und Resultate von Lie-Algebra Kohomologie.

Die Definition von Lie-Algebra Kohomologie mittels Korandoperator

Lie-Algebra Kohomologie wurde zuerst mittels Korandoperator definiert, d.h., durch eine explizite Formel, siehe [9] oder [18]. Im Gegensatz dazu steht die allgemeine Definition, die Lie Algebra Kohomologie als rechts-derivierten Funktor des links-exakten Invariantenfunktors $M \rightarrow M^{\mathfrak{g}}$ definiert.

1.1. Die Kohomologiegruppen $H^n(\mathfrak{g}, M)$

DEFINITION 1.1.1. Sei M ein \mathfrak{g} -Modul. Dann heißt

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{g}} &= \{m \in M \mid x \bullet m = 0 \forall x \in \mathfrak{g}\} \\ &= H^0(\mathfrak{g}, M) \end{aligned}$$

der Invarianten-Unterm modul von M bzw. die nullte Kohomologiegruppe von \mathfrak{g} mit Koeffizienten in M .

Seien V und W Vektorräume. Wir erinnern daran, daß eine multilineare Abbildung $f: V^p \rightarrow W$ *alternierend* heißt, falls $f(v_1, \dots, v_p) = 0$ gilt, sobald $v_i = v_j$ für ein Indexpaar $i < j$ gilt. Ist $\sigma \in \mathcal{S}_p$, so folgt

$$f(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_p}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot f(v_1, \dots, v_p)$$

Es bezeichne $\text{Alt}(V^n, W)$ den Vektorraum aller alternierenden Multilinearformen $f: V^n \rightarrow W$. Es gilt

$$\text{Hom}(\Lambda^n(V), W) \cong \text{Alt}(V^n, W)$$

DEFINITION 1.1.2. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra der Dimension n über einem Körper K . Sei M ein \mathfrak{g} -Modul mit der Operation $\mathfrak{g} \times M \rightarrow M$, $(x, m) \mapsto x \bullet m$. Dann ist der Raum der p -Koketten definiert durch

$$C^p(\mathfrak{g}, M) = \begin{cases} \text{Hom}_K(\Lambda^p \mathfrak{g}, M) & \text{if } p > 0, \\ 0 & \text{if } p < 0. \end{cases}$$

Wir setzen zudem

$$\begin{aligned} C^0(\mathfrak{g}, M) &= M \\ C(\mathfrak{g}, M) &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} C^k(\mathfrak{g}, M) \end{aligned}$$

Den Raum der p -Koketten können wir auch als $\text{Alt}(\mathfrak{g}^p, M)$ interpretieren.

DEFINITION 1.1.3. Die *Korand Operatoren* $d_p : C^p(\mathfrak{g}, M) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$ sind lineare Abbildungen, die definiert sind durch

$$(d_p \omega)(x_0 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{0 \leq r < s \leq p} (-1)^{r+s} \omega([x_r, x_s] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_r \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_s \wedge \cdots \wedge x_p) \\ + \sum_{t=0}^p (-1)^t x_t \bullet \omega(x_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_t \wedge \cdots \wedge x_p),$$

für $p \geq 0$ und $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)$. Für $p < 0$ setzen wir $d_p = 0$. Die Abbildungen d_p induzieren auch eine lineare Abbildung

$$d: C(\mathfrak{g}, M) \rightarrow C(\mathfrak{g}, M)$$

Man beachte, daß $d_p(\omega)$ tatsächlich ein Element von $C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$ ist.

DEFINITION 1.1.4. Die Elemente des Unterraumes $Z^p(\mathfrak{g}, M) = \ker d_p$ heißen *p-Kozykeln*, und die des Unterraumes $B^p(\mathfrak{g}, M) = \text{im } d_{p-1}$ heißen *p-Koränder*.

Wir werden bald zeigen, daß $d_p \circ d_{p-1} = 0$ gilt, d.h., $B^p(\mathfrak{g}, M) \subseteq Z^p(\mathfrak{g}, M)$. Deshalb macht folgende Definition Sinn.

DEFINITION 1.1.5. Der Quotientenraum

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = Z^p(\mathfrak{g}, M) / B^p(\mathfrak{g}, M)$$

heißt *p-te Kohomologiegruppe* von \mathfrak{g} mit Koeffizienten in dem \mathfrak{g} -Modul M .

BEMERKUNG 1.1.6. Die Sequenz

$$0 \rightarrow C^0(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \cdots$$

bildet einen Komplex. Er heißt der *Standard-Kokettenkomplex* und wird mit $\{C^\bullet(\mathfrak{g}, M), d\}$ bezeichnet [18].

Für $n = 0, 1, 2, 3$ haben wir insbesondere, mit der Interpretation als alternierende Abbildungen:

$$(d_0 \omega)(x_0) = x_0 \bullet \omega \\ (d_1 \omega)(x_0, x_1) = x_0 \bullet \omega(x_1) - x_1 \bullet \omega(x_0) - \omega([x_0, x_1]) \\ (d_2 \omega)(x_0, x_1, x_2) = x_0 \bullet \omega(x_1, x_2) - x_1 \bullet \omega(x_0, x_2) + x_2 \bullet \omega(x_0, x_1) \\ - \omega([x_0, x_1], x_2) + \omega([x_0, x_2], x_1) - \omega([x_1, x_2], x_0) \\ (d_3 \omega)(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 \bullet \omega(x_1, x_2, x_3) - x_1 \bullet \omega(x_0, x_2, x_3) \\ + x_2 \bullet \omega(x_0, x_1, x_3) - x_3 \bullet \omega(x_0, x_1, x_2) \\ - \omega([x_0, x_1], x_2, x_3) + \omega([x_0, x_2], x_1, x_3) \\ - \omega([x_0, x_3], x_1, x_2) - \omega([x_1, x_2], x_0, x_3) \\ + \omega([x_1, x_3], x_0, x_2) - \omega([x_2, x_3], x_0, x_1)$$

$n = 0$: Wir haben $B^0(\mathfrak{g}, M) = 0$. Also ist

$$H^0(\mathfrak{g}, M) = Z^0(\mathfrak{g}, M) = \{m \in M \mid x \bullet m = 0 \forall x \in \mathfrak{g}\} \\ = M^{\mathfrak{g}}$$

tatsächlich der Modul der Invarianten.

$n = 1$: Der Raum der 1-Kozykeln und 1-Koränder ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Z^1(\mathfrak{g}, M) &= \{\omega \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, M) \mid \omega([x, y]) = x \bullet \omega(y) - y \bullet \omega(x)\} \\ B^1(\mathfrak{g}, M) &= \{\omega \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, M) \mid \omega(x) = x \bullet m \text{ für ein } m \in M\} \end{aligned}$$

Angenommen M ist der triviale \mathfrak{g} -Modul K . Dann ist $d_0 = 0$ und $(d_1\omega)(x, y) = \omega([y, x])$. Also erhält man

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{g}, K) &= \{\omega \in \mathfrak{g}^* \mid \omega([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0\} \\ &\cong (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^* \end{aligned}$$

Ist M ein trivialer \mathfrak{g} -Modul, so gilt allgemeiner

$$H^1(\mathfrak{g}, M) \cong \text{Hom}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], M)$$

Falls $M = \mathfrak{g}$ der adjungierte \mathfrak{g} -Modul ist, so ist $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g})/\text{ad}(\mathfrak{g})$ der Raum der äußeren Derivationen von \mathfrak{g} . Dabei ist $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \{\text{ad } x \mid x \in \mathfrak{g}\}$ der Raum der inneren Derivationen von \mathfrak{g} .

$n := 2$ Der Raum der 2-Kozykel und 2-Koränder ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Z^2(\mathfrak{g}, M) &= \{\omega \in \text{Alt}(\mathfrak{g}^2, M) \mid x_1 \bullet \omega(x_2, x_3) - x_2 \bullet \omega(x_1, x_3) + x_3 \bullet \omega(x_1, x_2) \\ &\quad - \omega([x_1, x_2], x_3) + \omega([x_1, x_3], x_2) - \omega([x_2, x_3], x_1) = 0\} \\ B^2(\mathfrak{g}, M) &= \{\omega \in \text{Alt}(\mathfrak{g}^2, M) \mid \omega(x_1, x_2) = x_1 \bullet f(x_2) - x_2 \bullet f(x_1) - f([x_1, x_2]) \\ &\quad \text{für ein } f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, M)\} \end{aligned}$$

Wenn wir $M = K$ als trivialen \mathfrak{g} -Modul wählen, erhalten wir als Spezialfall:

$$\begin{aligned} Z^2(\mathfrak{g}, K) &= \{\omega \in \text{Alt}(\mathfrak{g}^2, K) \mid \omega([x_1, x_2], x_3) - \omega([x_1, x_3], x_2) \\ &\quad + \omega([x_2, x_3], x_1) = 0\} \\ B^2(\mathfrak{g}, K) &= \{\omega \in \text{Alt}(\mathfrak{g}^2, K) \mid \omega(x_1, x_2) = f([x_1, x_2]) \\ &\quad \text{für ein } f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, K)\} \end{aligned}$$

DEFINITION 1.1.7. Sei $i(x): C^p(\mathfrak{g}, M) \rightarrow C^{p-1}(\mathfrak{g}, M)$ die lineare Abbildung, die für $x \in \mathfrak{g}$ definiert ist durch

$$(i(x)\omega)(x_1, \dots, x_{p-1}) = \omega(x, x_1, \dots, x_{p-1})$$

Sie heißt Einfügungsabbildung. Man definiert $i(x)$ als Null auf $C^0(\mathfrak{g}, M)$.

DEFINITION 1.1.8. Sei $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(C^p(\mathfrak{g}, M))$, $x \mapsto \rho(x)$ die lineare Abbildung, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} (\rho(x)\omega)(x_1, \dots, x_p) &= - \sum_{i=1}^p \omega(x_1, \dots, [x, x_i], \dots, x_p) \\ &\quad + x \bullet \omega(x_1, \dots, x_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \omega([x, x_i], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_p) \\ &\quad + x \bullet \omega(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

SATZ 1.1.9. Die induzierte Abbildung $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(C(\mathfrak{g}, M))$ ist eine Lie-Algebra Darstellung, für die die sogenannte Cartan-Formel gilt:

$$(1.1) \quad \rho(x) = d_{p-1} \circ i(x) + i(x) \circ d_p$$

BEMERKUNG 1.1.10. Wir lassen bei den Abbildungen d_p manchmal die Indizes weg, d.h., schreiben nur $\rho(x) = d \circ i(x) + i(x) \circ d$.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, daß

$$(1.2) \quad \rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$$

gilt. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \rho(x)\rho(y)\omega(x_1, \dots, x_p) &= x \bullet (y \bullet \omega(x_1, \dots, x_p)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p y \bullet \omega(x_1, \dots, [x, x_i], \dots, x_p) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p x \bullet \omega(x_1, \dots, [y, x_i], \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{i,j=1, i \neq j}^p \omega(x_1, \dots, [y, x_i], \dots, [x, x_j], \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \omega(x_1, \dots, [y, [x, x_i]], \dots, x_p) \end{aligned}$$

Daraus folgt dann, mit der Jacobi Identität

$$\begin{aligned} [\rho(x), \rho(y)]\omega(x_1, \dots, x_p) &= [x, y] \bullet \omega(x_1, \dots, x_p) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p \omega(x_1, \dots, [[x, y], x_i], \dots, x_p) \\ &= \rho([x, y])\omega(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Um die Cartan-Formel einzusehen, schreiben wir die Formel für den Korandoperator mit Hilfe der Abbildung $i(x_0)$ wie folgt um:

$$\begin{aligned} d(i(x_0)\omega)(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{\ell=0}^{p-1} x_\ell \bullet (i(x_0)\omega)(x_1, \dots, \widehat{x}_\ell, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{0 \leq \ell < k \leq p-1} (-1)^{\ell+k} (i(x_0)\omega)([x_\ell, x_k], x_1, \dots, \widehat{x}_\ell, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Mit $\omega(x_0, [x_i, x_j], \dots, x_p) = -\omega([x_i, x_j], x_0, \dots, x_p)$ folgt dann

$$\begin{aligned}
(i(x_0)d\omega)(x_1, \dots, x_p) &= (d\omega)(x_0, x_1, \dots, x_p) \\
&= (-1)^0 x_0 \bullet \omega(x_1, \dots, x_p) \\
&\quad + \sum_{j=1}^p (-1)^j x_j \bullet \omega(x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) \\
&\quad + (-1)^{0+j} \omega([x_0, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) \\
&= (\rho(x_0)\omega)(x_1, \dots, x_p) \\
&\quad - \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} x_j \bullet (i(x_0)\omega)(x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) \\
&\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} (i(x_0)\omega)([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) \\
&= (\rho(x_0)\omega)(x_1, \dots, x_p) - d(i(x_0)\omega)(x_1, \dots, x_p),
\end{aligned}$$

und das ergibt die Behauptung. □

SATZ 1.1.11. *Es gelten die folgenden Formeln, für alle $x, y \in \mathfrak{g}$:*

$$(1.3) \quad i([x, y]) = [i(x), \rho(y)]$$

$$(1.4) \quad [\rho(x), d] = 0$$

BEWEIS. Wir zeigen zuerst (1.3). Es ist

$$\begin{aligned}
(i(x_1)\rho(y)\omega)(x_2, \dots, x_p) &= (\rho(y)\omega)(x_1, \dots, x_p) \\
&= y \bullet \omega(x_1, \dots, x_p) - \sum_{j=1}^p \omega(x_1, \dots, [y, x_j], \dots, x_p).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\rho(y)(i(x_1)\omega)(x_2, \dots, x_p) &= y \bullet (i(x_1)\omega)(x_2, \dots, x_p) \\
&\quad - \sum_{j=2}^p (i(x_1)\omega)(x_2, \dots, [y, x_j], \dots, x_p) \\
&= y \bullet \omega(x_1, \dots, x_p) - \sum_{j=2}^p \omega(x_1, x_2, \dots, [y, x_j], \dots, x_p).
\end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Terme, also $i(x_1)\rho(y)\omega - \rho(y)i(x_1)\omega$, entspricht der rechten Seite von (1.3): sie ist gleich dem Summanden für $j = 1$ in der ersten Summe, nämlich

$$-\omega([y, x_1], x_2, \dots, x_p) = (i([x_1, y])\omega)(x_2, \dots, x_p).$$

Also folgt $i(x)\rho(y) - \rho(y)i(x) = i([x, y])$. Um (1.4) zu zeigen, berechnen wir mit (1.1) und (1.3):

$$\begin{aligned}
[\rho(x), \rho(y)] &= [d \circ i(x) + i(x) \circ d, \rho(y)] \\
&= d \circ i(x) \circ \rho(y) + i(x) \circ d \circ \rho(y) - \rho(y) \circ d \circ i(x) - \rho(y) \circ i(x) \circ d \\
&= d \circ \rho(y) \circ i(x) + i(x) \circ d \circ \rho(y) + d \circ i(x) \circ \rho(y) + i(x) \circ \rho(y) \circ d \\
&\quad - \rho(y) \circ d \circ i(x) - i(x) \circ \rho(y) \circ d - d \circ \rho(y) \circ i(x) - \rho(y) \circ i(x) \circ d \\
&= [d, \rho(y)] \circ i(x) + i(x) \circ [d, \rho(y)] + d \circ [i(x), \rho(y)] + [i(x), \rho(y)] \circ d \\
&= [d, \rho(y)] \circ i(x) + i(x) \circ [d, \rho(y)] + d \circ i([x, y]) + i([x, y]) \circ d \\
&= [d, \rho(y)] \circ i(x) + i(x) \circ [d, \rho(y)] + \rho([x, y])
\end{aligned}$$

Da aber ρ eine Darstellung ist, folgt daraus

$$(1.5) \quad [d, \rho(y)] \circ i(x) + i(x) \circ [d, \rho(y)] = 0$$

Jetzt können wir mit Induktion über den Grad k von $C^k(\mathfrak{g}, M)$ beweisen, daß $[d, \rho(y)] = 0$ gilt.

$k = 0$: Für $\omega \in C^0(\mathfrak{g}, M) = M$ gilt

$$\begin{aligned}
([d, \rho(y)]\omega)(x) &= (d\rho(y)\omega)(x) - (\rho(y)d\omega)(x) \\
&= d(y \bullet \omega)(x) - (y \bullet (d\omega))(x) \\
&= x \bullet (y \bullet \omega) - y \bullet (x \bullet \omega) - d\omega([y, x]) \\
&= [x, y] \bullet \omega + [y, x] \bullet \omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

$k \mapsto k + 1$: Wir haben $[d, \rho(y)]C^k(\mathfrak{g}, M) = 0$ nach Induktionsannahme. Es folgt mit (1.5)

$$\begin{aligned}
i(x) \circ [d, \rho(y)]C^{k+1}(\mathfrak{g}, M) &= -[d, \rho(y)]i(x)C^{k+1}(\mathfrak{g}, M) \\
&\subseteq [d, \rho(y)]C^k(\mathfrak{g}, M) \\
&= \{0\}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathfrak{g}$. Daraus folgt $[d, \rho(y)]C^{k+1}(\mathfrak{g}, M) = 0$. □

Nun beweisen wir, wie versprochen, den folgenden Satz:

SATZ 1.1.12. *Der Korandoperator d_p erfüllt $d_p \circ d_{p-1} = 0$ für alle $p \geq 1$, d.h., $d^2 = 0$.*

BEWEIS. Mit (1.1) und (1.4) folgt

$$\begin{aligned}
0 &= [\rho(x), d] \\
&= [d \circ i(x), d] + [i(x) \circ d, d] \\
&= d^2 \circ i(x) - i(x) \circ d^2
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel zeigen wir induktiv $d^2 = 0$.

$k = 0$: Für $\omega \in C^0(\mathfrak{g}, M) = M$ ist $(d\omega)(x) = x \bullet \omega$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
(d^2\omega)(x, y) &= x \bullet d\omega(y) - y \bullet d\omega(x) - d\omega([x, y]) \\
&= x \bullet (y \bullet \omega) - y \bullet (x \bullet \omega) - [x, y] \bullet \omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

$k \mapsto k + 1$: Angenommen, $d^2(C^k(\mathfrak{g}, M)) = \{0\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} i(x) \circ d^2(C^{k+1}(\mathfrak{g}, M)) &= d^2 \circ i(x)(C^{k+1}(\mathfrak{g}, M)) \\ &\subseteq d^2(C^k(\mathfrak{g}, M)) = \{0\} \end{aligned}$$

und somit $d^2(C^{k+1}(\mathfrak{g}, M)) = \{0\}$. \square

Die Lie-Algebra \mathfrak{g} operiert auf dem graduierten Vektorraum $C(\mathfrak{g}, M)$ durch $x \bullet \omega = \rho(x)\omega$. Der Korandoperator d kommutiert mit dieser Aktion, wie wir in (1.4) gesehen haben. Also sind die Räume $Z^p(\mathfrak{g}, M)$ und $B^p(\mathfrak{g}, M)$ beide \mathfrak{g} -invariant und wir erhalten eine Operation auf dem Quotienten $H^p(\mathfrak{g}, M)$. Das macht $H^p(\mathfrak{g}, M)$ zu einem \mathfrak{g} -Modul, der allerdings trivial ist:

LEMMA 1.1.13. *Die Operation von \mathfrak{g} auf $H^p(\mathfrak{g}, M)$ ist trivial, d.h.,*

$$\mathfrak{g} \bullet Z^p(\mathfrak{g}, M) \subseteq B^p(\mathfrak{g}, M)$$

BEWEIS. Sei $\omega \in Z^p(\mathfrak{g}, M)$, also $d_p\omega = 0$. Wegen (1.1) folgt

$$\begin{aligned} \rho(x)\omega &= i(x) \circ d_p\omega + d_{p-1} \circ i(x)\omega \\ &= d_{p-1} \circ i(x)\omega \end{aligned}$$

welches in $B^p(\mathfrak{g}, M)$ liegt. Also ist die induzierte Operation auf $H^p(\mathfrak{g}, M)$ trivial. \square

Falls M ein trivialer \mathfrak{g} -Modul ist, können wir auch die Lie-Algebra $\text{Der}(\mathfrak{g})$ auf $H^p(\mathfrak{g}, M)$ operieren lassen. Dazu definieren wir eine Darstellung $\pi: \text{Der}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(C(\mathfrak{g}, M))$ durch Endomorphismen $\pi(D) \in \text{End}(C^p(\mathfrak{g}, M))$ für $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ wie folgt: für $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ setzen wir $\pi(D)(\omega) = D \bullet \omega$ mit

$$(1.6) \quad (D \bullet \omega)(x_1, \dots, x_p) = - \sum_{j=1}^p \omega(x_1, \dots, D(x_j), \dots, x_p)$$

SATZ 1.1.14. *Es gelten die folgenden Formeln:*

$$(1.7) \quad [\pi(D), i(x)] = i(D(x))$$

$$(1.8) \quad [\pi(D), \rho(x)] = \rho(D(x))$$

$$(1.9) \quad [\pi(D), d] = 0$$

BEWEIS. Seien $\omega \in C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ und $x \in \mathfrak{g}$. Dann folgt mit (1.6)

$$\begin{aligned} D(i(x)\omega)(x_1, \dots, x_p) &= - \sum_{j=1}^p (i(x)\omega)(x_1, \dots, D(x_j), \dots, x_p) \\ &= - \sum_{j=1}^p \omega(x, x_1, \dots, D(x_j), \dots, x_p) \\ &= (\pi(D)(\omega))(x, x_1, \dots, x_p) + \omega(D(x), x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Das bedeutet $(\pi(D)i(x))(\omega) = (i(x)\pi(D))(\omega) + (i(D(x)))(\omega)$, also (1.7). Die Beziehung

$$[D, \text{ad } x] = \text{ad } D(x)$$

auf \mathfrak{g} impliziert (1.8) für die Darstellung ρ auf $C(\mathfrak{g}, M)$. Wir überlassen die Rechnung dem Leser. Jetzt können wir die Cartan-Formel (1.1), sowie (1.7), (1.8) anwenden, um die Relation

$$(1.10) \quad i(x)[\pi(D), d] + [\pi(D), d]i(x) = 0$$

zu zeigen:

$$\begin{aligned} i(D(x))d + di(D(x)) &= \rho(D(x)) \\ &= [\pi(D), i(x)d + di(x)] \\ &= \pi(D)i(x)d - di(x)\pi(D) + \pi(D)di(x) - i(x)d\pi(D) \\ &= (i(D(x))d + i(x)\pi(D)d) + (di(D(x)) - d\pi(D)i(x)) \\ &\quad + \pi(D)di(x) - i(x)d\pi(D) \\ &= i(D(x))d + i(x)[\pi(D), d] + [\pi(D), d]i(x) + di(D(x)) \end{aligned}$$

Die Relation (1.10) benutzt man nun wieder, um (1.9) mit Induktion zu zeigen. Für $\omega \in C^0(\mathfrak{g}, M) = M$ gilt $d\omega = 0$ und $\pi(D)\omega = D \bullet \omega = 0$, also auch $[\pi(D), d]\omega = 0$. Nimmt man $[\pi(D), d]C^k(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$ an, so folgt wegen (1.10) wieder $[\pi(D), d]C^{k+1}(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$. \square

Also erhält die Operation von $\pi(D)$ auf $C^p(\mathfrak{g}, M)$ die Räume $Z^p(\mathfrak{g}, M), B^p(\mathfrak{g}, M)$, da sie mit d kommutiert. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

SATZ 1.1.15. *Sei M ein trivialer \mathfrak{g} -Modul. Die Darstellung $\pi: \text{Der}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(C(\mathfrak{g}, M))$ induziert eine Modul-Operation von $\text{Der}(\mathfrak{g})$ auf $H^p(\mathfrak{g}, M)$.*

1.2. Interpretation von $H^1(\mathfrak{g}, M)$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die erste Kohomologiegruppe gewisse Erweiterungen von \mathfrak{g} -Moduln beschreibt.

DEFINITION 1.2.1. Es seien V, W zwei \mathfrak{g} -Moduln. Ein \mathfrak{g} -Modul V_1 heißt *Erweiterung* von V durch W , falls

$$(1.11) \quad 0 \rightarrow W \xrightarrow{\alpha} V_1 \xrightarrow{\beta} V \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von \mathfrak{g} -Moduln ist.

DEFINITION 1.2.2. Eine Erweiterung V_1 von V durch W heißt *trivial*, oder *zerfallend*, falls es in (1.11) einen Modulhomomorphismus $\tau: V \rightarrow V_1$ gibt mit $\beta \circ \tau = \text{id}_V$.

Ist die Erweiterung (1.11) zerfallend, dann ist die Abbildung $V \oplus W \rightarrow V_1, (x, a) \mapsto a + \tau(x)$ ein \mathfrak{g} -Modul Isomorphismus.

DEFINITION 1.2.3. Es seien V_1, V_2 zwei Erweiterungen von V durch W . Die beiden Erweiterungen heißen *äquivalent*, falls es einen \mathfrak{g} -Modul Homomorphismus $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\alpha} & V_1 & \xrightarrow{\beta} & V \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\gamma} & V_2 & \xrightarrow{\delta} & V \longrightarrow 0 \end{array}$$

Es bezeichne $\text{Ext}(V, W)$ die Menge der Äquivalenzklassen aller \mathfrak{g} -Modul Erweiterungen (1.11) von V durch W .

Falls die Erweiterungen V_1 und V_2 äquivalent sind, so sind sie automatisch isomorph als \mathfrak{g} -Moduln, da φ nach dem Fünferlemma bijektiv ist. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Wir wollen nun zeigen, daß die Äquivalenzklassen von Erweiterungen der Form $0 \rightarrow W \xrightarrow{\alpha} V_1 \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ mit dem trivialen \mathfrak{g} -Modul K genau durch $H^1(\mathfrak{g}, W)$ klassifiziert werden. Wir beginnen mit der Feststellung, daß jedes $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, W)$ eine Erweiterung von K durch W induziert.

LEMMA 1.2.4. *Sei W ein \mathfrak{g} -Modul und $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, W)$. Man definiere auf $W_\omega := K \times W$ eine Operation von \mathfrak{g} durch*

$$(1.12) \quad x \bullet (t, w) = (0, x.w + t\omega(x))$$

für $x \in \mathfrak{g}, w \in W$ und $t \in K$. Damit wird W_ω zu einem \mathfrak{g} -Modul der Dimension $\dim W + 1$.

BEWEIS.

$$\begin{aligned} x \bullet (y \bullet (t, w)) - y \bullet (x \bullet (t, w)) &= x \bullet (0, y.w + t\omega(y)) - y \bullet (0, x.w + t\omega(x)) \\ &= (0, x.(y.w) + tx.\omega(y)) - (0, y.(x.w) + ty.\omega(x)) \\ &= (0, [x, y].w + t(x.\omega(y) - y.\omega(x))) \\ &= (0, [x, y].w + t\omega([x, y])) \\ &= [x, y] \bullet (t, w) \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 1.2.5. $0 \rightarrow W \xrightarrow{\alpha} W_\omega \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ ist eine kurze exakte Sequenz von \mathfrak{g} -Moduln.

Sind A und B zwei \mathfrak{g} -Moduln mit Produkt $x.a$ und $x \circ b$ für $x \in \mathfrak{g}, a \in A, b \in B$, so wird $\text{Hom}(B, A)$ zu einem \mathfrak{g} -Modul durch

$$(1.13) \quad (x \bullet \varphi)(b) = x.\varphi(b) - \varphi(x \circ b)$$

für $x \in \mathfrak{g}$ und $\varphi \in \text{Hom}(B, A)$.

THEOREM 1.2.6. *Für zwei \mathfrak{g} -Moduln A und B gilt*

$$(1.14) \quad \text{Ext}(B, A) \cong H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$$

Insbesondere gilt für den trivialen \mathfrak{g} -Modul $\text{Ext}(K, A) \cong H^1(\mathfrak{g}, A)$.

BEWEIS. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$ eine Erweiterung von B durch A . Für $B = K$ sind die beiden \mathfrak{g} -Moduln A und $\text{Hom}(K, A)$ isomorph. Also gilt $\text{Ext}(K, A) \cong H^1(\mathfrak{g}, A)$ wegen (1.14). Mit anderen Worten, $H^1(\mathfrak{g}, A)$ klassifiziert die Äquivalenzklassen von Erweiterungen $0 \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow K \rightarrow 0$.

Es ist klar, daß wir die Modulerweiterung C als $B \times A$ schreiben können, versehen mit der Operation

$$(1.15) \quad x \bullet (b, a) = (x.b, x.a + \omega(x)(b))$$

wobei $x \in \mathfrak{g}, a \in A, b \in B$ und $\omega \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A)) = C^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$. Um das zu sehen, wähle man eine transversale Funktion τ , also eine lineare Abbildung $\tau: B \rightarrow C$ mit $\tau \circ \beta = \text{id}_B$ und definiere

$$\omega_\tau(x)(b) = \omega(x)(b) := x.\tau(b) - \tau(x.b)$$

Dann ist nämlich die Abbildung

$$\psi: B \times A \rightarrow C, \quad (b, a) \mapsto \tau(b) + a$$

eine \mathfrak{g} -Modul Isomorphismus. Allerdings definiert (1.15) erst dann eine \mathfrak{g} -Modul Struktur auf $B \times A$, wenn $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$ ist: einerseits ist

$$[y, x] \bullet (b, a) = ([y, x].b, [y, x].a + \omega([y, x])(b)),$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} y \bullet (x \bullet (b, a)) - x \bullet (y \bullet (b, a)) &= (y.(x.b), y.(x.a) + y.\omega(x)(b) + \omega(y)(x.b)) \\ &\quad - (x.(y.b), x.(y.a) + x.\omega(y)(b) + \omega(x)(y.b)) \\ &= ([y, x].b, [y, x].a + y.\omega(x)(b) + \omega(y)(x.b) \\ &\quad - x.\omega(y)(b) - \omega(x)(y.b)) \\ &= ([y, x].b, [y, x].a + (y \cdot \omega(x))(b) - (x \cdot \omega(y))(b)) \end{aligned}$$

Offenbar sind beide Ausdrücke genau dann gleich, wenn

$$\omega([y, x]) = y.\omega(x) - x.\omega(y)$$

gilt, d.h., wenn $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$ ist. Damit haben wir eine Korrespondenz zwischen Erweiterungen von B durch A und dem Raum $Z^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$. Nun haben wir aber noch verschiedene Parametrisierungen von C als $B \times A$, indem wir verschiedene transversale Funktionen τ wählen können. Für eine lineare Abbildung $\gamma \in \text{Hom}(B, A)$ ist

$$\begin{aligned} \omega_{\tau+\gamma}(x)(b) &= x.((\tau + \gamma)(b)) - (\tau + \gamma)(x.b) \\ &= x.\tau(b) - \tau(x.b) + x.\gamma(b) - \gamma(x.b) \\ &= \omega_\tau(x)(b) + (x.\gamma)(b) \end{aligned}$$

Also gilt $\omega_{\tau+\gamma} = \omega_\tau + d\gamma$. Daher unterscheiden sich $\omega_{\tau+\gamma}$ und ω_τ nur durch einen 1-Korand. Verschiedene Wahlen von τ führen also zu kohomologen Kozykeln. Es folgt, daß äquivalente Erweiterungen von B durch A den Klassen $[\omega_\tau]$ in $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$ entsprechen. Damit erhält man eine Bijektion von $\text{Ext}(B, A)$ mit $H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$. \square

Ein wichtiges Resultat über die erste Kohomologiegruppe ist das sogenannte Whitehead-Lemma:

THEOREM 1.2.7 (Whitehead). *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik Null und M ein endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul. Dann gilt $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$.*

BEWEIS. Nach dem Theorem von Weyl ist jeder endlich-dimensionale \mathfrak{g} -Modul einer endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebra halbeinfach. Das bedeutet, daß jeder Untermodul ein Modulkomplement hat. Daher sind alle Modulerweiterungen trivial und es folgt

$$0 = \text{Ext}(B, A) = H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(B, A))$$

für jedes Paar endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Moduln A, B . Insbesondere folgt für $B = K$ dann $H^1(\mathfrak{g}, A) = 0$ für alle endlich-dimensionalen A . \square

BEMERKUNG 1.2.8. Für mehr Details, und die Verwendung des Casimir Operators, siehe [14]. Mit dem Whitehead-Lemma läßt sich umgekehrt der Satz von Weyl relativ leicht folgern. Man beachte, daß das Whitehead-Lemma im allgemeinen für Körper der Charakteristik $p > 0$ nicht gültig ist.

KOROLLAR 1.2.9. *Eine endlich-dimensionale Lie-Algebra \mathfrak{g} ist genau dann halbeinfach, wenn $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle endlich-dimensionalen \mathfrak{g} -Moduln M gilt.*

Wir wollen die erste Kohomologie für zwei Beispiele ganz explizit ausrechnen. Es gilt ja, wie gesagt, für den adjungierten Modul $M = \mathfrak{g}$, $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g}) / \text{ad}(\mathfrak{g})$ weil

$$Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \{D \in \text{End}(\mathfrak{g}) \mid D([x, y]) = [x, D(y)] + [D(x), y]\} = \text{Der}(\mathfrak{g})$$

$$B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$$

BEISPIEL 1.2.10. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ und $\text{char}(K) \neq 2$. Dann gilt $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$. Für $\text{char}(K) = 2$ ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_3(K)$ die Heisenberg Lie Algebra, und $\dim H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 4$.

Das folgt für $\text{char}(K) = 0$ natürlich auch schon ohne Rechnung aus dem Whitehead-Lemma, oder allein schon aus der Tatsache, daß alle Derivationen halbeinfacher Lie-Algebren innere sind, d.h., $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$. Sei (e_1, e_2, e_3) eine Basis von $\mathfrak{sl}_2(K)$ mit

$$[e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_1, e_3] = -2e_1$$

$$[e_2, e_3] = 2e_2$$

Sei nun $D \in \text{End}(\mathfrak{g})$ gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_7 \\ \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_8 \\ \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_9 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung

$$D(e_3) = D([e_1, e_2]) = [e_1, D(e_2)] + [D(e_1), e_2]$$

bedeutet

$$\begin{aligned} \alpha_7 e_1 + \alpha_8 e_2 + \alpha_9 e_3 &= [e_1, \alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2 + \alpha_6 e_3] + [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, e_2] \\ &= (\alpha_5 e_3 - 2\alpha_6 e_1) + (\alpha_1 e_3 - 2\alpha_3 e_2) \end{aligned}$$

Wir erhalten die linearen Gleichungen

$$\alpha_7 + 2\alpha_6 = 0$$

$$\alpha_8 + 2\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_9 - \alpha_5 - \alpha_1 = 0$$

Ganz analog folgt aus den Bedingungen für $D([e_1, e_3]), D([e_2, e_3])$ dann noch

$$2\alpha_9 = 0$$

$$-4\alpha_2 = 0$$

$$4\alpha_4 = 0$$

Damit ist, falls $2 \neq 0$ gilt, jede Derivation von der Form

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & -2\alpha_6 \\ 0 & -\alpha_1 & -2\alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_6 \text{ad } e_1 - \alpha_3 \text{ad } e_2 + \frac{1}{2} \text{ad } e_3$$

Das bedeutet $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{ad } \mathfrak{g}$ und $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$. Im Fall $2 = 0$ folgt

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_1 + \alpha_5 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\dim Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 6$ und $\dim B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \dim \text{ad}(\mathfrak{g}) = 2$.

BEISPIEL 1.2.11. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_4(K)$ die filiform nilpotente Lie-Algebra der Dimension 4, und K beliebig. Dann gilt $\dim H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 4$.

Sei (e_1, e_2, e_3, e_4) eine Basis von $\mathfrak{n}_4(K)$ mit

$$[e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_1, e_3] = e_4$$

Sei nun

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_4 & \cdots & \alpha_{16} \end{pmatrix}$$

Die Bedingung

$$D(e_3) = D([e_1, e_2]) = [e_1, D(e_2)] + [D(e_1), e_2]$$

bedeutet zum Beispiel

$$\begin{aligned} \alpha_9 e_1 + \dots + \alpha_{12} e_4 &= [e_1, \alpha_5 e_1 + \dots + \alpha_8 e_4] + [\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_4 e_4, e_2] \\ &= (\alpha_6 e_3 + \alpha_7 e_4) - (\alpha_1 e_3) \end{aligned}$$

Es folgt $\alpha_9 = \alpha_{10} = 0$, $\alpha_{11} = \alpha_6 - \alpha_1$ und $\alpha_{12} = \alpha_7$. Mit den weiteren Bedingungen folgt, daß D von der Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \xi_5 & 0 & 0 \\ \xi_3 & \xi_6 & \xi_1 + \xi_5 & 0 \\ \xi_4 & \xi_7 & \xi_6 & 2\xi_1 + \xi_5 \end{pmatrix}$$

ist. Der Raum solcher Derivationen ist 7-dimensional mit Basis D_1, \dots, D_7 , also mit

$$D = \sum_{i=1}^7 \xi_i D_i$$

Also ist $\dim Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 7$. Offenbar ist $\dim B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 3$, also $\dim H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 4$. Es ist $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \text{span}\{[D_1], [D_2], [D_5], [D_7]\}$, denn $D_6 = \text{ad } e_1$, $D_3 = -\text{ad } e_2$ und $D_4 = -\text{ad } e_3$ sind innere Derivationen. Interessanterweise existieren, falls $2 \neq 0$ und $3 \neq 0$ gilt, invertierbare Derivationen, etwa $D_1 + D_5 = \text{diag}\{1, 1, 2, 3\}$ oder $D_1 + 2D_6 = \text{diag}\{1, 2, 3, 4\}$.

Jacobson zeigte 1955 den folgenden Satz [17]:

SATZ 1.2.12 (Jacobson). Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Lie-Algebra der Charakteristik Null. Es existiere eine invertierbare Derivation $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Dann ist \mathfrak{g} nilpotent.

Weiterhin gilt:

SATZ 1.2.13 (Dixmier). Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale nilpotente Lie-Algebra der Charakteristik Null. Dann existiert eine äußere Derivation $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$, also $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \neq 0$.

In beliebiger Charakteristik gilt:

SATZ 1.2.14 (Zassenhaus). Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Lie-Algebra beliebiger Charakteristik, deren Killingform nicht-ausgeartet ist. Dann sind alle $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ innere Derivationen, also $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$.

BEWEIS. Sei $f(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$ die Killingform von \mathfrak{g} und $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Man betrachte die Linearform $x \mapsto \text{tr}(\text{ad } x \circ D)$ auf \mathfrak{g} . Da f nicht-ausgeartet ist, existiert ein $z \in \mathfrak{g}$ so daß $f(x, z) = \text{tr}(\text{ad } x \circ D)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Setze $E = D - \text{ad } z \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{ad } x \circ E) &= \text{tr}(\text{ad } x \circ D) - \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } z) \\ &= \text{tr}(\text{ad } x \circ D) - f(x, z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das impliziert nun

$$\begin{aligned} f(E(x), y) &= \text{tr}(\text{ad } E(x) \circ \text{ad } y) \\ &= \text{tr}([\text{ad } x, E] \circ \text{ad } y) \\ &= \text{tr}(\text{ad } x \circ E \circ \text{ad } y - E \circ \text{ad } x \circ \text{ad } y) \\ &= \text{tr}(E \circ \text{ad } y \circ \text{ad } x - E \circ \text{ad } x \circ \text{ad } y) \\ &= \text{tr}(E \circ [\text{ad } y, \text{ad } x]) \\ &= \text{tr}(E \circ \text{ad}[y, x]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

weil $\text{tr}(E \circ \text{ad } w) = 0$ für alle $w \in \mathfrak{g}$ gilt, siehe oben. Da f nicht-ausgeartet ist, folgt $E = 0$ und deshalb $D = \text{ad } z$. \square

1.3. Interpretation von $H^2(\mathfrak{g}, M)$

Die zweite Kohomologiegruppe beschreibt Klassen gewisser Erweiterungen von Lie-Algebren.

DEFINITION 1.3.1. Seien \mathfrak{q} und \mathfrak{n} zwei Lie-Algebren. Eine kurze exakte Sequenz

$$(1.16) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{q} \rightarrow 0$$

heißt Erweiterung von \mathfrak{q} durch \mathfrak{n} .

Identifizieren wir \mathfrak{n} und $\alpha(\mathfrak{n})$, so bedeutet das, daß \mathfrak{g} die Lie-Algebra \mathfrak{n} als Ideal enthält mit Quotienten $\mathfrak{g}/\mathfrak{n} \cong \mathfrak{q}$.

DEFINITION 1.3.2. Eine Erweiterung (1.16) heißt *zerfallend*, falls es einen Lie-Algebra Homomorphismus $\tau: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{g}$ gibt mit $\beta \circ \tau = \text{id}_{\mathfrak{q}}$.

DEFINITION 1.3.3. Für zwei Lie-Algebren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und einem Lie-Algebra Homomorphismus $\varphi: \mathfrak{a} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{b})$ sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes_{\varphi} \mathfrak{b}$ die direkte Vektorraumsumme $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, versehen mit der folgenden Lie Klammer:

$$(1.17) \quad [(x, a), (y, b)] = ([x, y], [a, b] + \varphi(x)(b) - \varphi(y)(a))$$

Dann ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra, die das äußere semidirekte Produkt (eigentlich Summe) von \mathfrak{a} und \mathfrak{b} heißt.

SATZ 1.3.4. Jedes semidirekte Produkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \ltimes_{\varphi} \mathfrak{n}$ definiert eine zerfallende exakte Sequenz (1.16) bezüglich τ , so daß $\varphi(x)(n) = [\tau(x), n]$ für $x \in \mathfrak{q}, n \in \mathfrak{n}$ gilt. Umgekehrt definiert jede zerfallende exakte Sequenz (1.16) mit einem Lie-Algebra Homomorphismus $\tau: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{g}$ durch

$$(1.18) \quad \varphi: \mathfrak{q} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$$

$$(1.19) \quad \varphi(x)(n) = [\tau(x), n]$$

ein äußeres semidirektes Produkt $\mathfrak{q} \ltimes_{\varphi} \mathfrak{n}$, welches isomorph zu \mathfrak{g} ist.

BEWEIS. Das folgt fast alles wie im Gruppenfall. Wir zeigen hier nur, daß die Abbildung

$$(1.20) \quad \psi: \mathfrak{q} \ltimes_{\varphi} \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (x, a) \mapsto \tau(x) + a$$

ein Lie-Algebra Isomorphismus ist. Hierbei identifizieren wir a mit $\alpha(a)$. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}$ eine direkte Vektorraumsumme ist, ist die Darstellung $\tau(x) + a$ eindeutig. Deshalb ist ψ bijektiv. Weiterhin gilt mit (1.17) und (1.18)

$$\begin{aligned} \psi([(x, a), (y, b)]) &= \psi([x, y], [a, b] + \varphi(x)(b) - \varphi(y)(a)) \\ &= \psi([x, y], [a, b] + [\tau(x), b] - [\tau(y), a]) \\ &= \tau([x, y]) + [a, b] + [\tau(x), b] - [\tau(y), a] \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} [\psi(x, a), \psi(y, b)] &= [\tau(x) + a, \tau(y) + b] \\ &= [\tau(x), \tau(y)] + [a, \tau(y)] + [\tau(x), b] + [a, b] \\ &= \tau([x, y]) + [a, b] + [\tau(x), b] - [\tau(y), a] \end{aligned}$$

weil τ ein Lie-Algebra Homomorphismus ist. Also ist ψ ein Isomorphismus. \square

DEFINITION 1.3.5. Es seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ zwei Erweiterungen von \mathfrak{q} durch \mathfrak{n} . Die beiden Erweiterungen heißen *äquivalent*, falls es einen Lie-Algebra Homomorphismus $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{\gamma} & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\delta} & \mathfrak{q} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Es bezeichne $\text{Ext}(\mathfrak{q}, \mathfrak{n})$ die Menge der Äquivalenzklassen aller Lie-Algebra Erweiterungen (1.16) von \mathfrak{q} durch \mathfrak{n} .

Falls die Erweiterungen \mathfrak{g} und \mathfrak{g}' äquivalent sind, so sind sie automatisch isomorph als Lie-Algebren, da φ nach dem Fünferlemma bijektiv ist. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Ist V ein \mathfrak{g} -Modul, so ist V auch eine Lie-Algebra, nämlich eine abelsche. Dann gilt:

SATZ 1.3.6. Sei V ein \mathfrak{g} -Modul, $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, V)$ und $\mathfrak{g}_{\omega} = \mathfrak{g} \oplus V$. Auf diesem Vektorraum definiert

$$(1.21) \quad [(x, a), (y, b)]_{\mathfrak{g}_{\omega}} = ([x, y], x.b - y.a + \omega(x, y))$$

genau dann eine Lie-Klammer, wenn $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, V)$ gilt. Wir erhalten dann eine kurze exakte Sequenz von Lie-Algebren

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g}_{\omega} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

die genau dann zerfällt, wenn $\omega \in B^2(\mathfrak{g}, V)$ gilt.

BEWEIS. Die Jacobi-Identität für die Klammer (1.21) bedeutet

$$\begin{aligned} 0 &= [(x, a), [(y, b), (z, c)]] + [(y, b), [(z, c), (x, a)]] \\ &\quad + [(z, c), [(x, a), (y, b)]] \\ &= x.\omega(y, z) - y.\omega(x, z) + z.\omega(x, y) \\ &\quad - \omega([x, y], z) + \omega([x, z], y) - \omega([y, z], x) \end{aligned}$$

Das bedeutet aber genau $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, V)$. In diesem Fall ist \mathfrak{g}_ω mit (1.21) eine Lie-Algebra, so daß mit $\iota(a) = (0, a)$ für $a \in V$ und $\pi(x, a) = x$ für $x \in \mathfrak{g}$ die obige Sequenz exakt ist.

Jeder Homomorphismus $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_\omega$ mit $\pi \circ \tau = \text{id}$ ist von der Form $\tau(x) = (x, f(x))$ mit $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, V)$. Man hat

$$\begin{aligned} \tau([x, y]) &= ([x, y], f([x, y])) \\ [\tau(x), \tau(y)] &= [(x, f(x)), (y, f(y))] \\ &= ([x, y], x.f(y) - y.f(x) + \omega(x, y)) \end{aligned}$$

Also ist τ genau dann ein Homomorphismus, falls

$$\omega(x, y) = f([x, y]) - x.f(y) + y.f(x) \in B^2(\mathfrak{g}, V)$$

□

Betrachten wir nun eine *abelsche* Erweiterung von Lie-Algebren

$$(1.22) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{q} \rightarrow 0,$$

d.h., \mathfrak{a} ist abelsch. Dann können wir \mathfrak{a} auch zu einem \mathfrak{g} -Modul machen durch

$$(1.23) \quad x.a = \alpha^{-1}([\beta^{-1}(x), \alpha(a)]_{\mathfrak{g}})$$

für $x \in \mathfrak{q}$ und $a \in \mathfrak{a}$. Dabei ist $\beta^{-1}(x)$ ein beliebiges Urbild von x unter β . Da $\alpha(\mathfrak{a})$ ein Ideal in \mathfrak{g} ist, ist α^{-1} auch wirklich auf $[\beta^{-1}(x), \alpha(a)]$ definiert. Außerdem ist die Aktion wohldefiniert, weil \mathfrak{a} abelsch ist. Wir erhalten nun folgende Interpretation von $H^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$:

THEOREM 1.3.7. *Sei \mathfrak{a} eine abelsche Lie-Algebra. Dann gibt es eine bijektive Korrespondenz zwischen den Äquivalenzklassen abelscher Erweiterungen \mathfrak{g} von \mathfrak{q} durch \mathfrak{a} , und $H^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$ mit der Modulaktion (1.23).*

BEWEIS. Sei \mathfrak{g} eine abelsche Erweiterung (1.22) von \mathfrak{q} durch \mathfrak{a} . Man wähle eine lineare Abbildung $\tau: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $\beta \circ \tau = \text{id}$. Man definiere dazu ein $\omega = \omega_\tau \in \text{Alt}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{a})$ durch

$$(1.24) \quad \omega(x, y) = \alpha^{-1}([\tau(x), \tau(y)] - \tau([x, y]))$$

Diese Definition ist sinnvoll, da wegen

$$\begin{aligned} \beta([\tau(x), \tau(y)] - \tau([x, y])) &= [(\beta \circ \tau)(x), (\beta \circ \tau)(y)] - (\beta \circ \tau)([x, y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt $[\tau(x), \tau(y)] - \tau([x, y]) \in \ker \beta = \text{im } \alpha$, so daß man α^{-1} anwenden kann. Wir zeigen zuerst, daß $\omega \in Z^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$ gilt. Wir können $\tau(x)$ als Urbild $\beta^{-1}(x)$ in (1.23) wählen, d.h.,

$$(1.25) \quad x.a = \alpha^{-1}([\tau(x), \alpha(a)])$$

Dann folgt mit (1.24)

$$\begin{aligned}
(d_2\omega)(x_1, x_2, x_3) &= x_1.\omega(x_2, x_3) - x_2.\omega(x_1, x_3) + x_3.\omega(x_1, x_2) \\
&\quad - \omega([x_1, x_2], x_3) + \omega([x_1, x_3], x_2) - \omega([x_2, x_3], x_1) \\
&= \alpha^{-1}([\tau(x_1), [\tau(x_2), \tau(x_3)]]) - \alpha^{-1}([\tau(x_1), \tau[x_2, x_3]]) \\
&\quad - \alpha^{-1}([\tau(x_2), [\tau(x_1), \tau(x_3)]]) + \alpha^{-1}([\tau(x_2), \tau[x_1, x_3]]) \\
&\quad + \alpha^{-1}([\tau(x_3), [\tau(x_1), \tau(x_2)]]) - \alpha^{-1}([\tau(x_3), \tau[x_1, x_2]]) \\
&\quad - \alpha^{-1}([\tau([x_1, x_2]), \tau(x_3)]) + \alpha^{-1}(\tau([[x_1, x_2], x_3])) \\
&\quad + \alpha^{-1}([\tau([x_1, x_3]), \tau(x_2)]) - \alpha^{-1}(\tau([[x_1, x_3], x_2])) \\
&\quad - \alpha^{-1}([\tau([x_2, x_3]), \tau(x_1)]) + \alpha^{-1}(\tau([[x_2, x_3], x_1]))
\end{aligned}$$

Wenn wir den letzten Block in vier gleich große Blöcke unterteilen, so ergeben die Diagonalblöcke Null wegen der Jacobi-Identität in \mathfrak{g} und der in \mathfrak{q} . Die anderen beiden Blöcke heben sich weg. Es folgt also $\omega \in \ker d_2 = Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Wechselt man τ gegen τ' aus, so folgt $\omega_\tau - \omega_{\tau'} \in B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$: dazu sei $\sigma = \tau - \tau'$. Man hat $\beta(\sigma) = 0$, so daß $\sigma(\mathfrak{q}) \subset \alpha(\mathfrak{a})$ und $\alpha^{-1}\sigma \in \text{Hom}(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$. Es gilt

$$d(\alpha^{-1}\sigma)(x, y) = x.(\alpha^{-1}\sigma(y)) - y.(\alpha^{-1}\sigma(x)) - (\alpha^{-1}\sigma)([x, y])$$

Damit, und mit (1.25) folgt

$$\begin{aligned}
\omega_\tau(x, y) - \omega_{\tau'}(x, y) &= \alpha^{-1}([\tau(x), \tau(y)] - \tau([x, y])) \\
&\quad - \alpha^{-1}([\tau'(x), \tau'(y)] - \tau'([x, y])) \\
&= \alpha^{-1}([\sigma(x), \tau(y)] + [\tau(x), \sigma(y)] - \sigma([x, y])) \\
&= x.(\alpha^{-1}\sigma(y)) - y.(\alpha^{-1}\sigma(x)) - (\alpha^{-1}\sigma)([x, y]) \\
&= d(\alpha^{-1}\sigma)(x, y)
\end{aligned}$$

Damit hängt also die Kohomologieklassse $[\omega] \in H^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$ nicht von der Wahl von τ ab.

Wir zeigen nun, daß zwei äquivalente abelsche Erweiterungen die gleiche Kohomologieklassse bezüglich einer fixierten \mathfrak{q} -Aktion auf \mathfrak{a} definieren. Es seien \mathfrak{g}_ω und $\mathfrak{g}_{\omega'}$ zwei äquivalente Erweiterungen von \mathfrak{q} durch \mathfrak{a} . Dann gibt es eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{a}$, so daß die Abbildung

$$\varphi: \mathfrak{g}_\omega \rightarrow \mathfrak{g}_{\omega'}, \quad (x, a) \mapsto (x, a + \tilde{\varphi}(x)), \quad x \in \mathfrak{q}, a \in \mathfrak{a}$$

ein Lie-Algebra Homomorphismus ist. Das bedeutet aber, daß

$$\begin{aligned}
\varphi([(x, a), (y, b)]) &= \varphi([x, y], x.b - y.a + \omega(x, y)) \\
&= ([x, y], x.b - y.a + \omega(x, y) + \tilde{\varphi}([x, y]))
\end{aligned}$$

übereinstimmen muß mit

$$\begin{aligned}
[\varphi(x, a), \varphi(y, b)] &= [(x, a + \tilde{\varphi}(x)), (y, b + \tilde{\varphi}(y))] \\
&= ([x, y], x.(b + \tilde{\varphi}(y)) - y.(a + \tilde{\varphi}(x)) + \omega'([x, y]))
\end{aligned}$$

Das bedeutet aber gerade

$$\begin{aligned}
\omega_{\tau'}(x, y) - \omega_\tau(x, y) &= \tilde{\varphi}([x, y]) - x.\tilde{\varphi}(y) + y.\tilde{\varphi}(x) \\
&= -(d\tilde{\varphi})(x, y) \in B^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})
\end{aligned}$$

Nun sei umgekehrt $\omega \in Z^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$ vorgegeben. Durch (1.21) wird eine Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}_\omega \rightarrow \mathfrak{q} \rightarrow 0$$

definiert, wie wir in Satz (1.3.6) gesehen haben. Man sieht leicht, daß verschiedene Repräsentanten in der Klasse $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ zu äquivalenten Erweiterungen führen. \square

KOROLLAR 1.3.8. *Die Abbildung $Z^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) \rightarrow \text{Ext}(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$, $\omega \rightarrow [\mathfrak{g}_\omega]$ induziert eine Bijektion $H^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) \rightarrow \text{Ext}(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$, bei der die Nullklasse $[0] \in H^2(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$ der Klasse der zerfallenden Erweiterungen von \mathfrak{q} durch \mathfrak{a} entspricht.*

KOROLLAR 1.3.9. *Die Elemente von $H^2(\mathfrak{q}, K)$ klassifizieren die Äquivalenzklassen zentraler Erweiterungen von \mathfrak{q} durch K .*

Hierbei ist K der triviale \mathfrak{q} -Modul. Die Lie Klammer (1.21) wird zu

$$[(x, t), (y, t')] = ([x, y], \omega(x, y)), \quad t, t' \in K, x, y \in \mathfrak{g}$$

so daß $\alpha(K)$ offensichtlich im Zentrum von \mathfrak{g} liegt.

BEMERKUNG 1.3.10. Wenn \mathfrak{a} nicht abelsch ist, so ist die Klassifikation der Erweiterungen von \mathfrak{q} durch \mathfrak{a} komplizierter zu beschreiben. Jede Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q} \rightarrow 0$$

von \mathfrak{q} durch \mathfrak{n} definiert ein Faktorsystem (\mathfrak{n}, T) , d.h., einen Lie-Algebra Homomorphismus $T: \mathfrak{q} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})/\text{ad } \mathfrak{n}$. Allerdings kommen nicht alle solche Homomorphismen von einer Lie-Algebra Erweiterung. Die Obstruktion eines solchen T 's liegt in einer Kohomologiekategorie in $H^3(\mathfrak{q}, Z(\mathfrak{n}))$. Man beachte, daß man $Z(\mathfrak{n})$ zu einem \mathfrak{q} -Modul machen kann, via der Aktion von $\text{Der}(\mathfrak{n})/\text{ad } \mathfrak{n}$ auf $Z(\mathfrak{n})$, mit $[D].z = D(z)$ für $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ und $z \in Z(\mathfrak{n})$. Die Äquivalenzklassen von Lie-Algebra Erweiterungen, die zu einem Faktorsystem (\mathfrak{n}, T) gehören, werden durch $H^2(\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{n}))$ klassifiziert.

Analog zum ersten Whitehead-Lemma existiert das zweite Whitehead-Lemma:

THEOREM 1.3.11 (Whitehead). *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik Null und M ein endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul. Dann gilt $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$.*

BEWEIS. Sei $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, M)$ und $\mathfrak{g}_\omega = \mathfrak{g} \oplus_\omega M$ die zugehörige abelsche Erweiterung von \mathfrak{g} durch M , d.h.,

$$0 \rightarrow M \rightarrow \mathfrak{g}_\omega \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von Lie-Algebren. Dann ist $M = \text{rad}(\mathfrak{g}_\omega)$ das auflösbare Radikal von \mathfrak{g}_ω , weil M ein abelsches Ideal von \mathfrak{g}_ω ist mit halbeinfachem Quotienten $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_\omega/M$. Daher gibt es nach dem Satz von Levi ein Levi-Komplement zu M in \mathfrak{g}_ω , d.h., die obige exakte Sequenz zerfällt. Wegen Satz (1.3.6) bedeutet das $\omega \in B^2(\mathfrak{g}, M)$. \square

BEMERKUNG 1.3.12. Hier steckt die wesentliche Arbeit des Beweises in dem Theorem von Levi. Die beiden Lemmata von Whitehead lassen sich in dieser Form nicht auf höhere Kohomologiegruppen verallgemeinern. Es gilt nämlich z.B. folgender Satz.

SATZ 1.3.13. *Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie Algebra über einem Körper der Charakteristik Null. Dann ist $H^3(\mathfrak{g}, K) \neq 0$. Ist \mathfrak{g} einfach und $K = \mathbb{C}$, so gilt*

$$H^3(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}.$$

Deshalb muß man die Voraussetzungen für ein “drittes Whitehead-Lemma” überdenken. Beachten wir aber, daß für $M = M_1 \oplus M_2$ folgt

$$H^q(\mathfrak{g}, M) = H^q(\mathfrak{g}, M_1) \oplus H^q(\mathfrak{g}, M_2),$$

so sieht man, daß wegen Weyls Theorem sich die Berechnung von $H^q(\mathfrak{g}, M)$ für halbeinfache \mathfrak{g} auf einfache \mathfrak{g} -Moduln M reduzieren läßt. In der Tat, M ist direkte Summe von endlich vielen einfachen \mathfrak{g} -Moduln. Nehmen wir also an, daß M einfach ist. Falls $\mathfrak{g}.M = 0$, so folgt $\dim M = 1$ und $M = K$. Dann müssen die Gruppen $H^q(\mathfrak{g})$ keineswegs trivial sein für $q \geq 3$. Falls aber $\mathfrak{g}.M \neq 0$, und deshalb $\mathfrak{g}.M = M$ bzw. $M^{\mathfrak{g}} = 0$, so haben wir das folgende Resultat:

THEOREM 1.3.14 (Whitehead). *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik Null und M ein endlich-dimensionaler einfacher \mathfrak{g} -Modul mit $M^{\mathfrak{g}} = 0$. Dann gilt $H^q(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle $q \geq 0$.*

KOROLLAR 1.3.15. *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik Null und M ein beliebiger endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul. Dann gilt*

$$H^*(\mathfrak{g}, M) = H^*(\mathfrak{g}, K) \otimes M^{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{k \geq 3} H^k(\mathfrak{g}, K) \otimes M^{\mathfrak{g}}.$$

Das bestimmt die gesamte Kohomologie von \mathfrak{g} . Der Satz läßt sich auf reduktive Lie Algebren verallgemeinern:

SATZ 1.3.16. *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale reduktive Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik Null und M ein endlich-dimensionaler, halbeinfacher \mathfrak{g} -Modul. Dann gilt*

$$H^n(\mathfrak{g}, M) = H^n(\mathfrak{g}, M^{\mathfrak{g}}) \cong H^n(\mathfrak{g}, K) \otimes M^{\mathfrak{g}}.$$

Wir wollen die zweite Kohomologiegruppe wieder in zwei einfachen Beispielen explizit berechnen.

BEISPIEL 1.3.17. *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ und $\text{char}(K) \neq 2$. Dann ist $H^2(\mathfrak{g}, K) = 0$.*

Das folgt für $\text{char}(K) = 0$ auch ohne Rechnung aus dem zweiten Whitehead-Lemma. Sei (e_1, e_2, e_3) eine Basis von \mathfrak{g} wie in (1.2.10). Sei $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, K)$. Dann ist $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, K)$ falls gilt

$$\omega([e_i, e_j], e_k) - \omega([e_i, e_k], e_j) + \omega([e_j, e_k], e_i) = 0$$

Doch das ist offenbar eine leere Bedingung. Für $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ etwa bedeutet das

$$\omega(e_3, e_3) + 2\omega(e_1, e_2) + 2\omega(e_2, e_1) = 0,$$

also $0 = 0$. Das gilt auch für alle anderen Indizes. Man sieht auch sofort, daß $\omega(e_i, e_j) = f([e_i, e_j])$ mit einem $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, K)$ darstellbar ist, da $[e_1, e_2], [e_1, e_3]$ und $[e_2, e_3]$ wieder eine Basis für \mathfrak{g} ist. Es folgt also $Z^2(\mathfrak{g}, K) = C^2(\mathfrak{g}, M) = B^2(\mathfrak{g}, M)$.

BEISPIEL 1.3.18. *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_4(K)$. Dann gilt $\dim H^2(\mathfrak{g}, K) = 2$.*

Sei (e_1, e_2, e_3, e_4) eine Basis von $\mathfrak{n}_4(K)$ wie in (1.2.11). Die Bedingung

$$\omega([e_1, e_2], e_3) - \omega([e_1, e_3], e_2) + \omega([e_2, e_3], e_1) = 0$$

bedeutet $\omega(e_2, e_4) = 0$. Für $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ folgt $\omega(e_3, e_4) = 0$. Man hat $Z^2(\mathfrak{g}, K) = \text{span}\{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{23}\}$, wobei $\omega_{ij}(e_i, e_j) = 1$, $\omega_{ij}(e_j, e_i) = -1$ und sonst Null ist. Man sieht

auch, daß $B^2(\mathfrak{g}, K) = \text{span}\{\omega_{12}, \omega_{13}\}$ gilt:

$$1 = \omega_{12}(e_1, e_2) = f([e_1, e_2]) = f(e_3)$$

$$1 = \omega_{13}(e_1, e_3) = f([e_1, e_3]) = f(e_4)$$

$$1 = \omega_{14}(e_1, e_4) \neq f([e_1, e_4]) = 0$$

$$1 = \omega_{23}(e_2, e_3) \neq f([e_2, e_3]) = 0$$

Es folgt $H^2(\mathfrak{g}, K) = \text{span}\{[\omega_{14}], [\omega_{23}]\}$.

Die zweite Kohomologiegruppe $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ mit adjungierten Koeffizienten hat noch eine besondere Bedeutung - sie beschreibt alle infinitesimalen Deformationen von \mathfrak{g} : Deformationen von assoziativen Algebren und beliebigen Ringen wurden zuerst von [12] Gerstenhaber eingeführt, und für Lie Algebren von Nijenhuis and Richardson [21]. Sie studierten 1-Parameter-Deformationen von Lie Algebren und beschrieben die infinitesimalen Deformationen durch zweite Lie Algebra Kohomologie mit dem adjungierten Modul.

DEFINITION 1.3.19. Sei \mathfrak{g} eine Lie Algebra über einem Körper K mit Lie Klammer $[\cdot, \cdot]$ und $g, h \in \mathfrak{g}$, $\varphi_k \in \text{Hom}(\Lambda^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Eine *formale Ein-Parameter-Deformation* von \mathfrak{g} ist eine Potenzreihe

$$[g, h]_t := [g, h] + \sum_{k \geq 1} \varphi_k(g, h)t^k,$$

so daß die Jacobi Identität für $[\cdot, \cdot]_t$ gilt.

Dabei muß \mathfrak{g} nicht unbedingt endlich-dimensional sein. Der unendlich-dimensionale Fall ist sehr interessant in der Physik und wurde ebenfalls eingehend studiert. Man erhält nun unendlich viele Bedingungen durch die Jacobi Identität für $[\cdot, \cdot]_t$. Für $k = 1$ rechnet man nach, daß $\varphi_1 \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ folgt. Alle Bedingungen kann man elegant in der folgenden differentiell graduierten Lie Algebra Struktur des Komplexes $\{C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), d\}$ beschreiben: für $\alpha \in C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ und $\beta \in C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ ist das Produkt $[\alpha, \beta] \in C^{p+q-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ definiert durch

$$\begin{aligned} & [\alpha, \beta](g_1, \dots, g_{p+q-1}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} (-1)^{\sum_s (i_s - s)} \alpha(\beta(g_{i_1}, \dots, g_{i_q}), g_1, \dots, \widehat{g_{i_1}}, \dots, \widehat{g_{i_q}}, \dots, g_{p+q-1}) \\ &- (-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{j_1 < \dots < j_p} (-1)^{\sum_t (j_t - t)} \beta(\alpha(g_{j_1}, \dots, g_{j_p}), g_1, \dots, \\ &\quad \widehat{g_{j_1}}, \dots, \widehat{g_{j_p}}, \dots, g_{p+q-1}). \end{aligned}$$

wobei die Summation über alle Indizes i_r, j_r mit $1 \leq i_r, j_r \leq p+q-1$ geht.

Die Jacobi Identität für $[\cdot, \cdot]_t$ ist äquivalent zu der Folge von Relationen

$$d\varphi_k = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} [\varphi_i, \varphi_{k-i}], \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Für $k = 1$ erhalten wir $d\varphi_1 = 0$, also $\varphi_1 \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Zwei Deformationen von \mathfrak{g} heißen *äquivalent*, falls die resultierenden Lie Algebren isomorph sind. Die Kohomologiekategorie von φ_1 heißt das *Differential* der formalen Deformation $[\cdot, \cdot]_t$ und hängt nur von der Äquivalenzklasse der Deformation ab. Eine Kohomologiekategorie aus $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ heißt *infinitesimale* Deformation von \mathfrak{g} . Man beachte jedoch, daß eine infinitesimale Deformation $[\varphi] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ nicht notwendigerweise das Differential einer formalen Deformation ist. Die obigen Gleichungen für $k = 2, 3, 4, \dots$ sind

notwendige und hinreichende Bedingungen dafür. Wenn sie gelten, heißt φ_1 auch *integrierbar*. Wir haben folgendes Resultat, siehe [24]:

THEOREM 1.3.20 (Rauch). *Sei \mathfrak{g} eine n -dimensionale Lie Algebra über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Falls $H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$ gilt, dann ist jede infinitesimale Deformation von \mathfrak{g} integrierbar.*

Eine n -dimensionale Lie Algebra \mathfrak{g} heißt *rigide*, falls ihr Lie Algebra Gesetz μ in der Varietät $\mathcal{L}_n(k)$ in der Zariski Topologie offenen Orbit $O(\mu)$ hat. Das bedeutet, alle Lie Algebra Strukturen $\lambda \in \mathcal{L}_n(k)$ in der Nähe von μ sind schon isomorph zu μ . In der Tat folgt, daß dann μ nur triviale infinitesimale Deformationen hat (also solche, die äquivalent zur Identität sind):

THEOREM 1.3.21. *Sei \mathfrak{g} eine Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null, oder über $k = \mathbb{R}$. Falls $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$ gilt, so ist \mathfrak{g} rigide.*

Es gibt allerdings rigide Lie Algebren \mathfrak{g} mit $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \neq 0$. Zum Beispiel betrachtet man

$$\mathfrak{g}_n = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ltimes_{\varphi_n} \mathbb{C}^n$$

zu der irreduziblen Darstellung $\varphi_n: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Dann folgt, für $n \equiv 1(4)$ und $n \geq 13$ tatsächlich, daß \mathfrak{g}_n rigide ist, und zusätzlich $H^2(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n) \neq 0$ gilt.

Wegen des zweiten Whitehead Lemmas sind halbeinfache Lie Algebren der Charakteristik Null rigide. Das gilt auch für beliebige parabolische Unterhalbgebren solcher Lie Algebren:

THEOREM 1.3.22. *Sei \mathfrak{p} eine parabolische Unterhalbgebra einer halbeinfachen Lie Algebra der Charakteristik Null. Dann gilt $H^n(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$ für alle $n \geq 0$.*

Die Anzahl der nicht-isomorphen rigiden Lie Algebra Gesetze $\mu \in \mathcal{L}_n(k)$ ist endlich, weil $O(\mu)$ dann eine irreduzible Komponente der Varietät $\mathcal{L}_n(k)$ ist, von denen es nur endlich viele gibt. Die Anzahl wächst aber, für großes n , mindestens mit $\exp(\frac{\log^2(2)n}{2\log(n)})$, siehe [4].

BEMERKUNG 1.3.23. Wir fragen uns, welche Lie Algebren \mathfrak{g} die Bedingung $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle endlich-dimensionalen \mathfrak{g} -Moduln M erfüllen. Gilt, wie im Fall von $H^1(\mathfrak{g}, M)$ die Umkehrung des Whitehead Lemmas, daß solche Lie Algebren halbeinfach sein müssen? Sie müßten rigide sein, und u.a. auch $H^2(\mathfrak{g}, K) = 0$ erfüllen. Damit sollte es nicht so viele Möglichkeiten geben. In positiver Charakteristik gibt übrigens überhaupt keine endlich-dimensionale Lie Algebra \mathfrak{g} mit $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle endlich-dimensionalen \mathfrak{g} -Moduln M . Tatsächlich gilt folgendes, siehe [11]: Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale modulare Lie Algebra. Dann gibt es einen endlich-dimensionalen \mathfrak{g} -Modul M mit

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \neq 0$$

für alle $n = 0, 1, \dots, \dim(\mathfrak{g})$.

Abschließend hier noch ein Resultat von Dixmier [10] über die Kohomologie nilpotenter Lie-Algebren. Für einen \mathfrak{g} -Modul M sagt man, daß er den \mathfrak{g} -Modul N enthält, falls N ein Quotientenmodul eines Untermoduls von M ist.

THEOREM 1.3.24 (Dixmier). *Sei \mathfrak{g} eine nilpotente Lie-Algebra über einem unendlichen Körper K und M ein endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul. Dann gilt:*

- (1) $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle $p \geq 0$, falls M keinen trivialen Modul enthält.
- (2) $\dim H^p(\mathfrak{g}, M) \geq 2$ für $0 < p < \dim \mathfrak{g}$, falls M einen trivialen Modul enthält.

1.4. Interpretation von $H^3(\mathfrak{g}, M)$

Die dritte Lie Algebra Kohomologie $H^3(\mathfrak{g}, M)$ beschreibt unter anderem die Äquivalenzklassen gekreuzter Lie Algebra Moduln, oder auch die Äquivalenzklassen von Lie Algebra Kernen, also Homomorphismen $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow H^1(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$, wobei \mathfrak{m} eine Lie Algebra ist mit $Z(\mathfrak{m}) = M$. Für eine ausführliche Diskussion siehe [27].

DEFINITION 1.4.1. Seien \mathfrak{m} und \mathfrak{n} zwei Lie Algebren. Ein *gekreuzter Modul* $(\mu, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ist ein Lie Algebra Homomorphismus $\mu: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$ zusammen mit einer Operation η von \mathfrak{n} auf \mathfrak{m} , $(n, m) \mapsto n \cdot m = \eta(n)(m)$, mit folgenden Bedingungen:

$$(1.26) \quad \eta(\mu(m))(m') = [m, m'] \quad \forall m, m' \in \mathfrak{m},$$

$$(1.27) \quad \mu(\eta(n)(m)) = [\mu(m), n] \quad \forall n \in \mathfrak{n}, \forall m \in \mathfrak{m}.$$

Hier ist ein natürliches Beispiel für einen gekreuzten Modul:

BEISPIEL 1.4.2. Sei \mathfrak{m} eine Lie Algebra und $\mathfrak{n} = \text{Der}(\mathfrak{m})$. Definiere μ durch $\mu(m) = \text{ad}(m)$ und $\eta(n)(m) = n(m)$ für Derivationen n , so ist $(\mu, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ein gekreuzter Modul.

In der Tat, wir haben

$$\begin{aligned} \eta(\mu(m))(m') &= \mu(m)(m') = [m, m'], \\ \mu(\eta(n)(m)) &= \text{ad}(n(m)) = [\text{ad}(m), n] = [\mu(m), n]. \end{aligned}$$

Ist $(\mu, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ein gekreuzter Modul, so setzen wir

$$M := \ker(\mu).$$

Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{m} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{n}$$

exakt. Wegen (1.27) ist $\text{im}(\mu)$ ein Lie Algebra Ideal in \mathfrak{n} . Also ist

$$\mathfrak{g} := \text{coker}(\mu)$$

eine Lie Algebra, und wir erhalten die folgende exakte Sequenz

$$\mathfrak{m} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{n} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0.$$

Dabei ist M eine abelsche Lie Algebra, da M wegen (1.26) eine Unteralgebra von $Z(\mathfrak{m})$ ist. Wegen (1.27) induziert die Operation von \mathfrak{n} auf \mathfrak{m} auch eine \mathfrak{g} -Modul-Struktur auf M . Insgesamt erhalten wir:

SATZ 1.4.3. Jeder gekreuzter Modul $(\mu, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ induziert eine 4-Term exakte Sequenz

$$(1.28) \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{m} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{n} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

wobei M ein \mathfrak{g} -Modul ist.

DEFINITION 1.4.4. Zwei gekreuzte Moduln $(\mu, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ und $(\mu', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ mit Aktionen η bzw. η' mit $\ker(\mu) = \ker(\mu') = M$ und $\text{coker}(\mu) = \text{coker}(\mu') = \mathfrak{g}$ heißen *äquivalent*, falls es Lie Algebra Homomorphismen $\varphi: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}'$ und $\psi: \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}'$ gibt, so daß

$$\varphi(\eta(n)(m)) = \eta'(\psi(n))(\varphi(m)) \quad \forall m \in \mathfrak{m}, \forall n \in \mathfrak{n},$$

und das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & \mathfrak{m} & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{n} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \text{id} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \text{id} & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i'} & \mathfrak{m}' & \xrightarrow{\mu'} & \mathfrak{n}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Man beachte, daß hier φ und ψ nicht unbedingt Isomorphismen sein müssen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{CM}(\mathfrak{g}, M)$ die Äquivalenzklassen von gekreuzten Lie Algebra Moduln mit festem Kern M und festem Kokern \mathfrak{g} . Gerstenhaber bewies folgendes Resultat, siehe [13]:

THEOREM 1.4.5. *Es gibt eine 1 – 1 Korrespondenz zwischen Äquivalenzklassen gekreuzter Moduln mit Kern M und Kokern \mathfrak{g} und Elementen aus $H^3(\mathfrak{g}, M)$. Man hat $\mathcal{CM}(\mathfrak{g}, M) \cong H^3(\mathfrak{g}, M)$ als abelsche Gruppen.*

BEWEIS. Wir skizzieren den Beweis kurz. Die erste Frage ist, wie man aus einem gekreuzten Modul $(\mu, \mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ einen 3-Kozykel in $Z^3(\mathfrak{g}, M)$ erhält. Dazu betrachten wir die assoziierte 4-Term exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{m} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{n} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

und wählen eine transversale Funktion $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{n}$ mit $\pi \circ \tau = \text{id}_{\mathfrak{g}}$ und setzen wieder, für $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$,

$$\omega(x_1, x_2) = [\tau(x_1), \tau(x_2)] - \tau([x_1, x_2]).$$

Dann ist ω bilinear und schiefsymmetrisch in x_1, x_2 . Es gilt $\pi(\omega(x_1, x_2)) = 0$, weil π ein Lie Algebra Homomorphismus ist, also

$$\omega(x_1, x_2) \in \text{im}(\mu) = \ker(\pi).$$

Also gibt es ein $\beta(x_1, x_2) \in \mathfrak{m}$ mit

$$\mu(\beta(x_1, x_2)) = \omega(x_1, x_2).$$

Nun kann man eine transversale Funktion $\sigma: \text{im}(\mu) \rightarrow \mathfrak{m}$ wählen, so daß man β schreiben kann als

$$\beta(x_1, x_2) = \sigma(\omega(x_1, x_2)).$$

Das zeigt, daß wir annehmen dürfen, daß β bilinear und schiefsymmetrisch ist. Es bezeichne $d^{\mathfrak{m}}$ den formalen Korandoperator für \mathfrak{g} mit Werten in \mathfrak{m} . Man beachte, daß \mathfrak{m} i.a. kein \mathfrak{g} -Modul ist. Trotzdem können wir den Korandoperator formal hinschreiben. Nun kann man zeigen:

LEMMA 1.4.6. *Es gilt $\mu((d^{\mathfrak{m}}\beta)(x_1, x_2, x_3)) = 0$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$.*

Es folgt $(d^{\mathfrak{m}}\beta)(x_1, x_2, x_3) \in \ker(\mu) = \text{im}(i) = i(M)$. Deshalb existiert ein

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) \in M$$

mit $(d^{\mathfrak{m}}\beta)(x_1, x_2, x_3) = i(\gamma(x_1, x_2, x_3))$. Mit einer transversalen Funktion ρ auf $i(M) = \ker(\mu)$ können wir γ so wählen, daß $\gamma = \rho \circ d^{\mathfrak{m}}\beta$ gilt. Dann sieht man, daß γ trilinear und schiefsymmetrisch in x_1, x_2, x_3 ist. Man rechnet folgende Behauptung nach:

LEMMA 1.4.7. *Es gilt $\gamma \in Z^3(\mathfrak{g}, M)$. Dabei hängt γ nicht von der Wahl der transversalen Funktionen τ, σ, ρ ab.*

Man zeigt nun, daß zwei äquivalente gekreuzte Moduln die gleiche Klasse $[\gamma] \in H^3(\mathfrak{g}, M)$ induzieren. Dann hat man eine wohldefinierte Abbildung $\varphi: \mathcal{CM}(\mathfrak{g}, M) \rightarrow H^3(\mathfrak{g}, M)$, von der man Injektivität und Surjektivität zeigen muß. Das ist allerdings nicht so einfach. Es gibt hierzu verschiedene Beweise, siehe [27]. Eine Idee ist, die 4-Term exakte Sequenz (1.28) als sogenanntes *Yoneda-Produkt* von zwei kurzen exakten Sequenzen aufzufassen, die sich natürlicherweise aus (1.28) ergeben, nämlich

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}/i(M) \xrightarrow{\mu} \mathfrak{n} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{m} \xrightarrow{\mu} \text{im}(\mu) \rightarrow 0.$$

Die zweite Sequenz definiert dabei eine zentrale Erweiterung. Da π in (1.28) surjektiv ist und $\ker(\pi) = \text{im}(\mu) \cong \mathfrak{m}/\ker(\mu) = \mathfrak{m}/i(M)$, erhält man die erste kurze exakte Sequenz.

Im allgemeinen kann man mit dem Yoneda-Produkt von zwei gewissen kurzen exakten Sequenzen *alle* solchen gekreuzten Moduln konstruieren, und somit die Surjektivität von φ beweisen: zu jeder Kohomologieklassse $[\gamma] \in H^3(\mathfrak{g}, M)$ existiert ein gekreuzter Modul, deren assoziierte Kohomologieklassse gerade $[\gamma]$ ist. \square

CHAPTER 2

Die funktorielle Definition von Lie-Algebra Kohomologie

Wir diskutieren kurz die Sprechweisen der Kategorientheorie. Für mehr Details siehe z.B. [28].

2.1. Kategorien und Funktoren

DEFINITION 2.1.1. Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht aus einer nichtleeren Klasse $ob(\mathcal{C})$ von Objekten, einer Menge $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von Morphismen für jedes Paar von Objekten A, B , und einer Abbildung

$$(\alpha, \beta) \mapsto \beta \circ \alpha: \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$$

für jedes Tripel von Objekten A, B, C , die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Komposition von Morphismen ist assoziativ;
- (2) Für jedes Objekt A hat $\text{Hom}(A, A)$ ein Element id_A , das eine Rechtseins und Linkseins für die Komposition ist.

Eine fundamentale Kategorie ist die Kategorie \mathcal{S} der Mengen. Die Objekte sind Mengen, und die Morphismen sind Funktionen von Mengen. Eine weitere wichtige Kategorie ist die Kategorie \mathcal{AB} von abelschen Gruppen. Die Objekte sind abelsche Gruppen und die Morphismen sind Gruppenhomomorphismen. Ebenso bilden die Lie Algebren und ihre Morphismen eine Kategorie. Für uns ist die folgende Kategorie ein grundlegendes Beispiel:

BEISPIEL 2.1.2. Sei R ein Ring. Wir bezeichnen mit \mathcal{M}_R die Kategorie der Links R -Moduln.

Für eine Lie Algebra \mathfrak{g} und $R = U(\mathfrak{g})$ erhalten wir die Kategorie $\mathcal{M}_{U(\mathfrak{g})}$ der Links $U(\mathfrak{g})$ -Moduln. Für $R = \mathbb{C}$ erhalten wir die Kategorie $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ aller komplexer Vektorräume. Für $R = \mathbb{Z}$ erhalten wir die Kategorie $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{AB}$ aller abelschen Gruppen, und für $R = K[G]$ erhalten wir die Kategorie \mathcal{M}_G aller G -Moduln.

Für die Kohomologie von Lie Algebren sind wir an der Kategorie $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ der Links Lie-Algebra Moduln interessiert. Aber jeder Links \mathfrak{g} -Modul ist in natürlicher Weise ein (unitaler) Links $U(\mathfrak{g})$ -Modul und umgekehrt, und die Kategorie $\mathcal{M}_{U(\mathfrak{g})}$ ist isomorph zu $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$. Das folgt leicht aus der universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$, die das folgende besagt: wenn A eine assoziative K -Algebra mit 1 ist, und $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow A$ ein Lie Algebra Homomorphismus, dann gibt es einen eindeutigen K -Algebren-Homomorphismus $\tilde{\varphi}: U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ mit $\tilde{\varphi}(1) = 1$, so daß $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \iota$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & A \\
 \downarrow \iota & \nearrow \tilde{\varphi} & \\
 U(\mathfrak{g}) & &
 \end{array}$$

Man konstruiert $U(\mathfrak{g})$ als Quotient der Tensoralgebra

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}^{\otimes n}$$

nach dem Ideal I , welches von allen $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ erzeugt ist. Die Tensoralgebra ist eine gefilterte Algebra,

$$F_n T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} T^i(\mathfrak{g}).$$

Diese Filtrierung überlebt die Quotientenbildung nach I , d.h., $U(\mathfrak{g})$ ist ebenfalls gefiltert, mit dem n -ten Term der Filtrierung gegeben durch

$$U_n(\mathfrak{g}) = F_n T(\mathfrak{g}) / (I \cap F_n T(\mathfrak{g})).$$

Man hat zum Beispiel $U_0(\mathfrak{g}) \cong K$ und $U_1(\mathfrak{g}) \cong K \oplus \mathfrak{g}$.

DEFINITION 2.1.3. Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *additiv* falls sie ein Nullobjekt 0 hat und die Mengen $\text{Hom}(A, B)$ mit der Struktur einer abelschen Gruppe versehen sind, so daß die Kompositionsabbildungen bi-additiv sind und jede endliche Kollektion von Objekten in \mathcal{C} eine direkte Summe hat.

Dabei sagt man, daß Objekte A und B eine *direkte Summe* haben, falls es ein Objekt $A \oplus B$ und Abbildungen $i_A: A \rightarrow A \oplus B$, $i_B: B \rightarrow A \oplus B$, $p_A: A \oplus B \rightarrow A$, $p_B: A \oplus B \rightarrow B$ in der Kategorie gibt, so daß $p_A \circ i_A = \text{id}_A$, $p_B \circ i_B = \text{id}_B$, $p_A \circ i_B = 0$, $p_B \circ i_A = 0$ and $i_A p_A + i_B p_B = \text{id}_{A \oplus B}$.

Zum Beispiel ist \mathcal{M}_R eine additive Kategorie.

DEFINITION 2.1.4. Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie. Eine Folge von Objekten $0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{\alpha} C$ heißt *exakt*, falls die Folge abelscher Gruppen

$$0 \rightarrow \text{Hom}(T, A) \rightarrow \text{Hom}(T, B) \rightarrow \text{Hom}(T, C)$$

exakt ist für alle Objekte T in \mathcal{C} . Eine Folge $A \xrightarrow{\beta} B \rightarrow C \rightarrow 0$ ist exakt wenn die Folge von abelschen Gruppen

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, T) \rightarrow \text{Hom}(B, T) \rightarrow \text{Hom}(A, T)$$

exakt ist für alle Objekte T .

DEFINITION 2.1.5. Der *Kern* eines Morphismus $\alpha: B \rightarrow C$ ist ein Morphismus $i: A \rightarrow B$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Es gilt $\alpha \circ i = 0$.
- (2) Für jeden Morphismus $\beta: D \rightarrow B$ mit $\alpha \circ \beta = 0$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $\gamma: D \rightarrow A$ mit $\beta = i \circ \gamma$.

Der *Kokern* eines Morphismus $\beta: A \rightarrow B$ ist ein Morphismus $\pi: B \rightarrow C$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Es gilt $\pi \circ \beta = 0$.
- (2) Für jeden Morphismus $\alpha: B \rightarrow D$ mit $\alpha \circ \beta = 0$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $\gamma: C \rightarrow D$ mit $\alpha = \gamma \circ \pi$.

Im allgemeinen muß der Kern eines Morphismus, oder der Kokern, nicht existieren.

DEFINITION 2.1.6. Eine *abelsche Kategorie* ist eine additive Kategorie \mathcal{A} , in der jeder Morphismus sowohl einen Kern als auch einen Kokern besitzt; und in der jeder Monomorphismus ein Kern eines Morphismus ist und jeder Epimorphismus ein Kokern eines Morphismus ist.

BEISPIEL 2.1.7. Für jeden Ring R ist die Kategorie \mathcal{M}_R der R -Moduln eine abelsche Kategorie.

Insbesondere ist die Kategorie der Lie-Algebra Moduln $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ eine abelsche Kategorie. Die Kategorie der Links Lie-Algebra Moduln ist isomorph zu der Kategorie der Rechts Lie-Algebra Moduln. Wir machen daher manchmal keine Unterscheidung, wenn wir $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ schreiben.

BEISPIEL 2.1.8. Ist X ein topologischer Raum, dann ist die Kategorie aller Vektorbündel über X eine abelsche Kategorie.

BEISPIEL 2.1.9. Ist X ein topologischer Raum, dann ist die Kategorie aller Garben von abelschen Gruppen auf X eine abelsche Kategorie.

BEMERKUNG 2.1.10. Mitchell (1964) hat gezeigt, daß jede abelsche Kategorie eine volle Unterkategorie einer Modulkategorie über einem Ring ist.

DEFINITION 2.1.11. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist eine Zuordnung, die jedes Objekt A einer Kategorie \mathcal{C} einem Objekt $F(A)$ einer Kategorie \mathcal{D} zuordnet, und jedem Morphismus $\alpha: A \rightarrow B$ einen Morphismus $F(\alpha): F(A) \rightarrow F(B)$, so daß gilt $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$, und F die Komposition erhält. Genauer heißt F ein *kovarianter Funktor*, falls $F(\alpha \circ \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta)$ gilt, und *kontravarianter Funktor* falls $F(\alpha \circ \beta) = F(\beta) \circ F(\alpha)$ gilt.

BEISPIEL 2.1.12. Sei R ein Ring und M ein Links R -Modul. Dann ist $F = \text{Hom}_R(M, \cdot)$ ein kovarianter Funktor von \mathcal{M}_R nach \mathcal{AB} , und $F = \text{Hom}_R(\cdot, M)$ ein kontravarianter Funktor von \mathcal{M}_R nach \mathcal{AB} .

Die Schreibweise $F = \text{Hom}_R(M, \cdot)$ bedeutet $F(N) = \text{Hom}_R(M, N)$ für alle N in \mathcal{M}_R . Wenn $\beta: A \rightarrow B$ ein Morphismus in \mathcal{M}_R ist, wie sieht dann $F(\beta)$ aus? Dazu betrachte man die Folge $M \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B$ in \mathcal{M}_R mit dem fixen R -Modul M . Zu β definieren wir einen Homomorphismus $\tilde{\beta} = F(\beta)$ abelscher Gruppen,

$$F(\beta): \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B)$$

durch $F(\beta)(\alpha) = \tilde{\beta}(\alpha) = \beta \circ \alpha$. Offensichtlich folgt aus $\beta = \text{id}$ in \mathcal{M}_R auch $F(\beta) = \text{id}$ in \mathcal{AB} . Falls wir nun eine Folge

$$M \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\gamma} C$$

in \mathcal{M}_R haben, so folgt

$$(2.1) \quad F(\gamma \circ \beta)(\alpha) = (\gamma \circ \beta)(\alpha) = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$$

$$(2.2) \quad = F(\gamma)(F(\beta)(\alpha)).$$

Somit ist der Funktor $F = \text{Hom}_R(M, \cdot)$ kovariant. Die zweite Behauptung folgt analog.

BEISPIEL 2.1.13. Sei R ein kommutativer Ring und M, N zwei R -Moduln. Dann sind $F = M \otimes_R \cdot$ und $G = \cdot \otimes_R N$ kovariante Funktoren von \mathcal{M}_R nach \mathcal{M}_R .

Für $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ in \mathcal{M}_R setzt man

$$F(\alpha) = 1_M \otimes \alpha: M \otimes_R A \rightarrow M \otimes_R B,$$

wobei $(1_M \otimes \alpha)(x \otimes y) = x \otimes \alpha(y)$. Dann ist

$$(2.3) \quad F(\beta \circ \alpha) = 1_M \otimes (\beta \circ \alpha) = (1_M \otimes \beta) \circ (1_M \otimes \alpha)$$

$$(2.4) \quad = F(\beta)F(\alpha).$$

Somit ist der Funktor kovariant. Die zweite Behauptung folgt symmetrisch.

BEISPIEL 2.1.14. Für einen festen Modul $V \in \mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ ist $F = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\cdot, V)$ ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ nach $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ und $G = (V \otimes_{\mathbb{C}} \cdot)$ ein kovarianter Funktor von $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ in sich selbst.

DEFINITION 2.1.15. Ein kovarianter Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt *exakt*, falls er kurze exakte Sequenzen in \mathcal{A} in kurze exakte Sequenzen in \mathcal{B} überführt. Das bedeutet konkret, wenn

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in \mathcal{A} ist, dann ist

$$0 \rightarrow F(M_1) \rightarrow F(M_2) \rightarrow F(M_3) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in \mathcal{B} . Der Funktor heißt *links-exakt*, falls nur

$$0 \rightarrow F(M_1) \rightarrow F(M_2) \rightarrow F(M_3)$$

exakt ist, und er heißt *rechts-exakt*, falls nur

$$F(M_1) \rightarrow F(M_2) \rightarrow F(M_3) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Die Definition für kontravariante Funktoren ist analog, man muß nur die Pfeile in \mathcal{B} umdrehen. Ein kontravarianter Funktor ist also links-exakt, falls aus der Exaktheit von

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$$

die Exaktheit von

$$0 \rightarrow F(M_3) \rightarrow F(M_2) \rightarrow F(M_1)$$

folgt.

BEISPIEL 2.1.16. $\text{Hom}_R(\cdot, V)$ und $\text{Hom}_R(V, \cdot)$ sind links-exakte Funktoren von \mathcal{M}_R nach $\mathcal{A}\mathcal{B}$, der erste ist kontravariant, und der zweite kovariant.

Wir zeigen, daß $\text{Hom}_R(V, \cdot)$ ein links-exakter Funktor ist - er ist allerdings im allgemeinen nicht exakt. Es sei also

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\psi} M_2 \xrightarrow{\varphi} M_3$$

eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Wir müssen zeigen, daß die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(V, M_1) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \text{Hom}_R(V, M_2) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \text{Hom}_R(V, M_3)$$

exakt ist. Es sei also $\tilde{\psi}\sigma = 0$ für $\sigma \in \text{Hom}_R(V, M_1)$. Das bedeutet $\psi(\sigma(v)) = 0$ für alle $v \in V$. Also ist $\sigma(v) = 0$, weil ψ injektiv ist, und deshalb $\sigma = 0$. Also ist auch $\tilde{\psi}$ injektiv.

Sei $\tilde{\varphi}\tau = 0$ mit $\tau \in \text{Hom}_R(V, M_2)$. Dann ist $\varphi(\tau(v)) = 0$ für alle $v \in V$, und $\tau(v) = \psi(v')$ mit einem $v' \in M_1$, das von v abhängt. Da ψ injektiv ist, ist v' eindeutig. Definiere $\tau' \in \text{Hom}_R(V, M_1)$ durch dieses v' , also $\tau'(v) = v'$. Dann folgt

$$\tau(v) = \psi(v') = \psi(\tau'(v)) = (\tilde{\psi}\tau')(v).$$

Also liegt τ im Bild von $\tilde{\psi}$.

BEISPIEL 2.1.17. Die Funktoren $F = M \otimes_R \cdot$ und $F = \cdot \otimes_R N$ sind rechts-exakt, aber im allgemeinen nicht exakt.

DEFINITION 2.1.18. Ein Paar von Funktoren $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ heißt *adjungiert*, falls es für jedes Paar (A, B) mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ eine funktorielle Bijektion

$$\tau = \tau_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$$

gibt, d.h., eine Bijektion, so daß für alle $f: A \rightarrow A'$ in \mathcal{A} und $g: B \rightarrow B'$ in \mathcal{B} das folgende Diagramm der induzierten Abbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), B) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', G(B)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B')) \end{array}$$

Wir nennen F den links-adjungierten und G den rechts-adjungierten Funktor dieses Paares.

DEFINITION 2.1.19. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein Objekt I aus \mathcal{A} heißt *injektiv*, falls $\text{Hom}(\cdot, I)$ ein exakter Funktor ist, d.h., falls gilt: ist

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

exakt in \mathcal{A} , dann ist auch

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, I) \rightarrow \text{Hom}(B, I) \rightarrow \text{Hom}(A, I) \rightarrow 0$$

exakt.

Die Sequenz ist automatisch überall exakt außer bei $\text{Hom}(A, I)$. Also bedeutet I injektiv, daß jeder Homomorphismus $A \rightarrow I$ sich auf B fortsetzen lässt, d.h., für jede Injektion $f: A \rightarrow B$ und jedes $\alpha: A \rightarrow I$ existiert mindestens eine Abbildung $\beta: B \rightarrow I$, so daß $\alpha = \beta \circ f$. Als Diagramm haben wir:

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ & \uparrow & \nearrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{f} B \end{array}$$

SATZ 2.1.20. Sei I ein R -Modul in der Kategorie \mathcal{M}_R . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (1) I ist injektiv, d.h., der Funktor $\text{Hom}_R(\cdot, I)$ ist exakt.
- (2) Jede kurze exakte Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow I \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$ zerfällt.
- (3) Jeder R -Modul Homomorphismus eines Untermoduls A von B nach I läßt sich zu einem R -Modul Homomorphismus $B \rightarrow I$ fortsetzen.

Jede Kategorie \mathcal{C} hat eine *duale Kategorie* \mathcal{C}^{op} , wo die Objekte genau die gleichen sind wie in \mathcal{C} , aber die Morphismen und Kompositionen umgedreht sind, so daß man eine 1 – 1 Korrespondenz $f \mapsto f^{op}$ hat zwischen Morphismen $f: B \rightarrow C$ in \mathcal{C} und Morphismen $f^{op}: C \rightarrow B$ in \mathcal{C}^{op} . Die Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{C}^{op} sind aber im allgemeinen nicht isomorph: sei etwa \mathcal{T} die Kategorie der abelschen Torsionsgruppen. Dann ist \mathcal{T}^{op} die Kategorie der profiniten abelschen Gruppen.

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Dann kann man zeigen, daß auch \mathcal{A}^{op} wieder eine abelsche Kategorie ist, und injektive Objekte in \mathcal{A} sogenannten projektiven Objekten in \mathcal{A}^{op} entsprechen. Wir haben die folgende duale Definition.

DEFINITION 2.1.21. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein Objekt P von \mathcal{A} heißt *projektiv*, falls $\text{Hom}(P, \cdot)$ ein exakter Funktor ist, d.h., wenn gilt: ist $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exakt in \mathcal{A} , dann ist auch

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P, A) \rightarrow \text{Hom}(P, B) \rightarrow \text{Hom}(P, C) \rightarrow 0$$

exakt.

Man sieht leicht, daß A genau dann injektiv in \mathcal{A} ist, wenn A projektiv in \mathcal{A}^{op} ist. Wir erhalten damit

SATZ 2.1.22. Sei P ein R -Modul in der Kategorie \mathcal{M}_R . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (1) P ist projektiv, d.h., der Funktor $\text{Hom}_R(P, \cdot)$ ist exakt.
- (2) Jede kurze exakte Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ zerfällt.
- (3) Für jeden surjektiven R -Modul Homomorphismus $g: B \rightarrow C$ und jeden R -Modul Homomorphismus $\gamma: P \rightarrow C$ gibt es mindestens einen R -Modul Homomorphismus $\beta: P \rightarrow B$ so daß $\gamma = g \circ \beta$.

Das entsprechende Diagramm ist

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \gamma & \searrow \beta \\ 0 & \longleftarrow C & \longleftarrow B \end{array}$$

DEFINITION 2.1.23. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Man sagt, daß \mathcal{A} *genug Injektive* hat, falls es für jedes Objekt A in \mathcal{A} eine Injektion $A \rightarrow I$ gibt, wobei I injektiv ist. Man sagt, daß \mathcal{A} *genug Projektive* hat, falls es für jedes Objekt A in \mathcal{A} eine Surjektion $P \rightarrow A$ gibt, wobei P projektiv ist.

SATZ 2.1.24. Die Kategorie \mathcal{M}_R hat genug Injektive und genug Projektive.

Für einen detaillierten Beweis verweisen wir auf die Standardliteratur. Hier ist eine sehr kurze Beweisskizze: ist T eine dividierbare abelsche Gruppe, also der Homomorphismus $x \mapsto mx$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ surjektiv, dann ist $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, T)$ ein injektives Objekt in \mathcal{M}_R . Ist nun M irgendein R -Modul, so kann man M in eine divisible abelsche Gruppe T einbetten, was M in den injektiven Modul $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, T)$ einbettet. Also gibt es genug Injektive. Da jeder R -Modul das homomorphe Bild eines freien, also projektiven Moduls ist, folgt auch die zweite Behauptung. Insbesondere hat die Kategorie $\mathcal{M}_{U(\mathfrak{g})}$ genug Injektive und genug Projektive, und $U(\mathfrak{g})$ ist ein projektives Objekt. Die Kategorie $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ ist isomorph zu $\mathcal{M}_{U(\mathfrak{g})}$ und hat daher auch genug Injektive und Projektive. Der kontravariante Funktor $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\cdot, V)$ bildet Projektive auf Injektive in $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ ab, und der kovariante Funktor $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \cdot)$ bildet Injektive auf Projektive ab.

BEISPIEL 2.1.25. In der Kategorie aller komplexer Vektorräume sind alle Objekte projektiv und injektiv.

Jeder Modul in $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ ist frei, weil er eine Basis hat. Da jeder freie Modul projektiv ist, folgt die Behauptung.

BEISPIEL 2.1.26. Die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen \mathcal{F} ist ein Beispiel einer abelschen Kategorie, die gar keine projektiven Objekte hat. Die duale Kategorie \mathcal{F}^{op} ist isomorph zu \mathcal{F} . Daher hat \mathcal{F} auch keine injektiven Objekte.

BEISPIEL 2.1.27. Die Kategorie der endlich-dimensionalen Moduln über einem Potenzreihenring in einer Variablen hat weder projektive noch injektive Objekte.

2.2. Die allgemeine Definition

Wir wollen nun zu der funktoriellen Definition von Kohomologiegruppen kommen. Dazu könnten wir entweder mit Injektiven oder mit Projektiven arbeiten. Wir möchten uns hier aber auf Injektive festlegen. Zunächst brauchen wir noch den Begriff der Auflösung:

DEFINITION 2.2.1. Sei M ein Objekt einer Kategorie \mathcal{A} . Eine *Auflösung* von M ist eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^r \rightarrow \dots$$

Wir schreiben manchmal nur kurz $M \rightarrow I^\bullet$. Sind alle I^r injektive Objekte von \mathcal{A} , dann spricht man von einer *injektiven Auflösung* von M .

SATZ 2.2.2. *Hat eine abelsche Kategorie \mathcal{A} genug Injektive, dann besitzt jedes Objekt in \mathcal{A} eine injektive Auflösung.*

Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter und links-exakter Funktor von einer abelschen Kategorie in eine andere abelsche Kategorie. Sei $M \rightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung von M . Wenn wir den Funktor F darauf anwenden, erhalten wir einen Komplex

$$F(I): 0 \xrightarrow{d^{-1}} F(I^0) \rightarrow F(I^1) \rightarrow \dots \rightarrow F(I^r) \xrightarrow{d^r} F(I^{r+1}) \rightarrow \dots$$

der aber nicht mehr exakt sein muß. Man definiert

$$(R^r F)(M) = H^r(F(I)) := \ker(d^r) / \operatorname{im}(d^{r-1})$$

für alle $r \geq 0$. Man kann zeigen, daß die Objekte $(R^r F)(M)$ bis auf kanonische Isomorphie wohldefiniert sind. Weiterhin induziert ein Morphismus $\alpha: M \rightarrow N$ einen wohldefinierten Morphismus $(R^r F)(M) \rightarrow (R^r F)(N)$. In der Tat, die $R^r F$ sind Funktoren.

DEFINITION 2.2.3. Die Funktoren $R^r F$ heißen die *rechts-derivierten Funktoren* von F .

BEISPIEL 2.2.4. *Es gilt $R^0 F = F$.*

Da F links-exakt ist, ist $0 \rightarrow F(M) \rightarrow F(I^0) \xrightarrow{d^0} F(I^1)$ exakt. Deshalb gilt

$$(R^0 F)(M) = \ker(d^0) = F(M)$$

Man hat das folgende Resultat:

THEOREM 2.2.5. *Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ induziert eine lange exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow R^1 F(A) \rightarrow R^1 F(B) \rightarrow R^1 F(C) \rightarrow \dots \\ \rightarrow R^r F(A) \rightarrow R^r F(B) \rightarrow R^r F(C) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

und diese Zuordnung ist funktoriell.

Die letzte Aussage soll folgendes bedeuten: jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & R^{r-1}F(C) & \longrightarrow & R^r F(A) & \longrightarrow & R^r F(B) \longrightarrow R^r F(C) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & R^{r-1}F(C') & \longrightarrow & R^r F(A') & \longrightarrow & R^r F(B') \longrightarrow R^r F(C') \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

2.3. Die Definition im Spezialfall für Lie-Algebren

Jetzt können wir endlich die funktorielle Definition der Kohomologiegruppen von Lie-Algebren geben. Dazu spezialisieren wir die obigen Resultate, indem wir die Kategorie der Lie-Algebren und die der Lie-Algebra Moduln wählen. Dann brauchen wir noch folgendes Lemma:

LEMMA 2.3.1. *Der Funktor $F: \mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{M}_K$, $F(M) = M^{\mathfrak{g}}$ von der Kategorie der \mathfrak{g} -Moduln in die Kategorie der K -Moduln ist links-exakt.*

BEWEIS. Der triviale \mathfrak{g} -Modul Funktor $T: \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ ist der exakte Funktor, den man erhält wenn man einen K -Modul als trivialen \mathfrak{g} -Modul betrachtet. Nun ist $M^{\mathfrak{g}}$ der maximal triviale \mathfrak{g} -Unterm modul von M , so daß F rechts-adjungiert zu T ist. Deshalb ist F links-exakt. \square

Mit anderen Worten, wenn $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von \mathfrak{g} -Moduln ist, dann ist auch die Sequenz $0 \rightarrow N^{\mathfrak{g}} \rightarrow M^{\mathfrak{g}} \rightarrow V^{\mathfrak{g}} \rightarrow 0$ exakt. Da die Kategorie der \mathfrak{g} -Moduln genug Injektive besitzt, hat jeder \mathfrak{g} -Modul eine injektive Auflösung, und wir können die rechts-derivierten Funktoren von F bilden.

DEFINITION 2.3.2. Let \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und M ein \mathfrak{g} -Modul. Definiere die r -te Kohomologiegruppe von \mathfrak{g} mit Koeffizienten in M als

$$H^r(\mathfrak{g}, M) = R^r F(M)$$

Das bedeutet wieder folgendes: wenn wir eine injektive Auflösung

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

von M wählen, dann muß der Komplex

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} (I^0)^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{d^0} (I^1)^{\mathfrak{g}} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d^{r-1}} (I^r)^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{d^r} (I^{r+1})^{\mathfrak{g}} \rightarrow \cdots$$

nicht mehr exakt sein, und wir haben $H^r(\mathfrak{g}, M) \cong \ker(d^r)/\text{im}(d^{r-1})$. Für jeden Homomorphismus $\alpha: M \rightarrow N$ von \mathfrak{g} -Moduln und jeder injektiven Auflösung $M \rightarrow I^{\bullet}$ und $N \rightarrow J^{\bullet}$, läßt sich α zu einer Abbildung $\tilde{\alpha}: I^{\bullet} \rightarrow J^{\bullet}$ von Komplexen fortsetzen, d.h.,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & J^1 \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

und die Homomorphismen $H^r(\tilde{\alpha}): H^r(I^{\bullet\mathfrak{g}}) \rightarrow H^r(J^{\bullet\mathfrak{g}})$ sind unabhängig von der Wahl von $\tilde{\alpha}$. Wenn wir die letzte Aussage auf die Identität $\text{id}: M \rightarrow M$ anwenden, sehen wir, daß die Gruppen $H^r(\mathfrak{g}, M)$ bis auf kanonische Isomorphie wohldefiniert sind. Sie haben die folgenden fundamentalen Eigenschaften.

- (1) Es gilt $H^0(\mathfrak{g}, M) = F(M) = M^{\mathfrak{g}}$.
- (2) Ist I ein injektiver \mathfrak{g} -Modul, so gilt $H^r(\mathfrak{g}, I) = 0$ für alle $r > 0$, weil $0 \rightarrow I \rightarrow I \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ eine injektive Auflösung von I ist.
- (3) Jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow 0$ von \mathfrak{g} -Moduln induziert eine lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, N) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, M) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, V) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, N) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \dots \\ \rightarrow H^r(\mathfrak{g}, N) \rightarrow H^r(\mathfrak{g}, M) \rightarrow H^r(\mathfrak{g}, V) \rightarrow H^{r+1}(\mathfrak{g}, N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Die Abbildungen $H^r(\mathfrak{g}, V) \rightarrow H^{r+1}(\mathfrak{g}, N)$ heißen Verbindungshomomorphismen.

BEMERKUNG 2.3.3. Nun haben wir zwei verschiedene Definitionen von Lie-Algebra Kohomologie gesehen. Eine mittels Koketten und der expliziten Formel für den Korandoperator, die zweite mittels derivierter Funktoren. Natürlich kann man zeigen, daß es einen kanonischen Isomorphismus zwischen beiden Kohomologiegruppen gibt.

BEMERKUNG 2.3.4. Wir können ebenso Lie Algebra Homologie mittels derivierter Funktoren definieren, indem wir den Koinvariantenfunktor und projektive Auflösungen betrachten. Dann kann man auch wieder eine explizite Formel für den Randoperator angeben. Das Ergebnis ist wie folgt: Man definiere den Raum der n -Ketten als

$$C_n(\mathfrak{g}, M) = \Lambda^n(\mathfrak{g}) \otimes_K M.$$

Der Standardkomplex ist gegeben durch

$$0 \leftarrow M \cong \Lambda^0(\mathfrak{g}) \otimes M \xleftarrow{\partial_0} \Lambda^1(\mathfrak{g}) \otimes M \xleftarrow{\partial_1} \Lambda^2(\mathfrak{g}) \otimes M \xleftarrow{\partial_2} \dots$$

wobei der Randoperator $\partial_n: \Lambda^{n+1}(\mathfrak{g}) \otimes M \rightarrow \Lambda^n(\mathfrak{g}) \otimes M$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \partial(y_1 \wedge \dots \wedge y_{n+1} \otimes x) &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{y}_k \wedge \dots \wedge y_{n+1} \otimes y_k \cdot x \\ &+ \sum_{1 \leq r < s \leq n+1} (-1)^{r+s} [y_r, y_s] \wedge y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{y}_r \wedge \dots \wedge \widehat{y}_s \wedge \dots \wedge y_{n+1} \otimes x \end{aligned}$$

Dann definiert man $H_n(\mathfrak{g}, M) = \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1})$.

Für den trivialen \mathfrak{g} -Modul K gilt

$$\dim H_n(\mathfrak{g}, K) = \dim H^n(\mathfrak{g}, K).$$

Eine weitere Beziehung zu den Kohomologiegruppen ist die sogenannte Poincare-Dualität. Ist \mathfrak{g} eine unimodulare Lie Algebra der Dimension n , also $\text{tr ad}(x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, dann gilt

$$H_p(\mathfrak{g}, K) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, K), \quad p = 0, 1, \dots, n.$$

Also hat man dann $b_p(\mathfrak{g}) = b_{n-p}(\mathfrak{g})$, und man muß nur die Hälfte der Bettizahlen ausrechnen.

Anwendungen von Lie-Algebra Kohomologie

Wir beschreiben in aller Kürze einige Themen und Resultate, die mit Lie-Algebra Kohomologie zu tun haben.

3.1. Relative Lie-Algebra Kohomologie

Kohomologische Konstruktionen spielen eine wichtige Rolle in der Darstellungstheorie von reductiven Gruppen. Für eine kompakte Lie Gruppe K und eine Lie-Algebra \mathfrak{g} ist die Kategorie der sogenannten (\mathfrak{g}, K) -Moduln von Bedeutung. Dabei ist \mathfrak{k} , die Lie-Algebra von K , eine Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g} . Ferner operiert K auf \mathfrak{g} durch Automorphismen $\text{Ad}(k), k \in K$, die die adjungierte Operation auf \mathfrak{k} erweitern. Man kann dann einen links-exakten Invariantenfunktor $(\cdot)^{\mathfrak{g}, K}$ definieren und seine rechts-derivierten Funktoren bilden. Dann erhält man eine Verallgemeinerung der Lie-Algebra Kohomologie, nämlich die *relative* Lie-Algebra Kohomologie. Auch dafür gibt es eine elementare Definition mittels Kozykeln und Korändern:

DEFINITION 3.1.1. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einem Körper F , \mathfrak{k} eine Unteralgebra und M ein \mathfrak{g} -Modul. Definiere

$$C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) = \{\omega \in C^q(\mathfrak{g}, M) \mid i(x)\omega = \rho(x)\omega = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{k}\}$$

Das ist ein Unterraum von $C^q(\mathfrak{g}, M)$, der invariant unter d ist. Also können wir, wie in (1.1.3) die Kohomologie des Komplexes $\{C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M), d\}$ definieren, also

$$H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) = Z^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M)/B^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M)$$

Die Gruppen heißen relative Kohomologiegruppen von $\mathfrak{g} \bmod \mathfrak{k}$ mit Koeffizienten in M .

Man beachte, daß

$$C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) = \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), M)$$

wobei die Aktion von \mathfrak{k} auf $\Lambda^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ durch die adjungierte Darstellung induziert wird. Mit anderen Worten, man kann $C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M)$ mit dem Unterraum identifizieren, der aus den $f \in \text{Hom}_F(\Lambda^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), M)$ besteht, die der Relation

$$\sum_{i=1}^q f(x_1, \dots, [x, x_i], \dots, x_q) = x \bullet f(x_1, \dots, x_q)$$

genügen, mit $x \in \mathfrak{k}, x_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, i = 1, \dots, q$. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) &= H^0(\mathfrak{g}, M) = M^{\mathfrak{g}} \\ &= \{m \in M \mid x \bullet m = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\} \end{aligned}$$

SATZ 3.1.2 (Künneth Formel). *Es seien $\mathfrak{k}_1 \leq \mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{k}_2 \leq \mathfrak{g}_2$ Unteralgebren, M_1 ein \mathfrak{g}_1 -Modul, M_2 ein \mathfrak{g}_2 -Modul, und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$, $M = M_1 \otimes M_2$. Dann gilt für alle q :*

$$H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) = \bigoplus_{a+b=q} H^a(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, M_1) \otimes H^b(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{k}_2, M_2)$$

Die Idee ist, daß wir

$$\begin{aligned} C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) &= (\Lambda^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes M)^\mathfrak{k}, \\ \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* &= \Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}_1)^* \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_2/\mathfrak{k}_2)^* \end{aligned}$$

schreiben können. Wenn wir aber \mathfrak{k}_i -Moduln A_i und U_i haben, $i = 1, 2$, und deren Tensorprodukt $A_1 \otimes A_2$, $U_1 \otimes U_2$ in der üblichen Weise zu \mathfrak{k} -Moduln machen, dann gilt

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes U_1 \otimes U_2)^\mathfrak{k} = (A_1 \otimes U_1)^{\mathfrak{k}_1} \otimes (A_2 \otimes U_2)^{\mathfrak{k}_2}$$

Deshalb folgt

$$C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) = C^*(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, M) \otimes C^*(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{k}_2, M)$$

SATZ 3.1.3 (Poincaré Dualität). *Sei \mathfrak{g} eine unimodulare Lie-Algebra der Charakteristik Null mit $\dim \mathfrak{g} = n$, \mathfrak{k} eine reduktive Unteralgebra von \mathfrak{g} mit $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k} = m$. Dann gilt für alle q*

$$H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, F) \cong (H^{m-q}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, F))^*$$

Man beachte, daß \mathfrak{k} auch unimodular ist, da \mathfrak{k} reduktiv ist. Also operiert \mathfrak{k} trivial auf $\Lambda^m(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$. Es ist $\dim C^m(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, F) = 1$, so daß für die höchste Kohomologiegruppe gilt

$$H^m(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, F) = C^m(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, F) = F$$

3.2. Totale Lie-Algebra Kohomologie

Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra der Dimension $n \geq 2$ über einem Körper K . Wir betrachten die Kohomologie $H^*(\mathfrak{g}, K)$ mit trivialen Koeffizienten.

DEFINITION 3.2.1. Die *totale Kohomologie* von \mathfrak{g} ist die Zahl

$$\sigma(\mathfrak{g}) = \sum_{i=0}^n \dim H^i(\mathfrak{g}, K) = \sum_{i=0}^n b_i(\mathfrak{g})$$

Die Zahlen $b_i(\mathfrak{g})$ heißen *Betti Zahlen* von \mathfrak{g} . Deninger und Singhof hatten behauptet, daß $\sigma(\mathfrak{g})$ durch 4 teilbar sei, falls \mathfrak{g} nilpotent, $K = \mathbb{Q}$ und $n \neq 1, 3, 7$. Man rechnet jedoch leicht nach, daß schon die standard graduierten filiformen Lie-Algebren \mathfrak{f}_n des öfteren ein Gegenbeispiel liefern. Die Lie Klammern sind durch $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ gegeben für $i = 1, \dots, n-1$. Dabei ist (e_1, \dots, e_n) eine Basis von \mathfrak{f}_n . Zum Beispiel gilt $\sigma(\mathfrak{f}_{15}) = 1690$, und das ist nicht durch 4 teilbar. Trotzdem sollte $\sigma(\mathfrak{g}) \equiv 0 \pmod{4}$ für viele Lie-Algebren gelten. Ist \mathfrak{g} etwa einfach, so ist die triviale Kohomologie durch eine äußere Algebra gegeben, deren Dimension eine Potenz von 2 ist. In [6] finden wir folgendes Resultat:

THEOREM 3.2.2. *Sei \mathfrak{g} eine unimodulare Lie-Algebra der Charakteristik Null oder $p \neq 2$ und $n = \dim \mathfrak{g} \not\equiv 3 \pmod{4}$. Dann gilt $\sigma(\mathfrak{g}) \equiv 0 \pmod{4}$.*

Der Beweis benutzt, daß hier die Euler Charakteristik $\chi(\mathfrak{g})$ von \mathfrak{g} gleich Null ist.

DEFINITION 3.2.3. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra der Dimension n und M ein endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul. Dann heißt die Zahl

$$\chi(\mathfrak{g}, M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}, M)$$

die Euler-Poincaré Charakteristik von \mathfrak{g} . Für $M = K$ schreiben wir abkürzend $\chi(\mathfrak{g}) = \chi(\mathfrak{g}, K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(\mathfrak{g})$.

Man hat folgendes Theorem [23]:

THEOREM 3.2.4. Sei $\mathfrak{g} \neq 0$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über K , und M ein endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul. Es gelte entweder $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, oder $\text{char } K = 0$. Dann folgt $\chi(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Bei diesem Beweis wird unter anderem die Hochschild-Serre Spektralsequenz verwendet. Für den Beweis der Teilbarkeit durch 4 der totalen Kohomologie wird außerdem verwendet, daß der Rank einer schiefsymmetrischen Matrix gerade ist, sofern $\text{char } K \neq 2$. Für $\text{char } K = 2$ muß der Beweis daher modifiziert werden. In [6] wird gezeigt:

THEOREM 3.2.5. Sei \mathfrak{g} eine unimodulare Lie-Algebra der Charakteristik $p = 2$ und der Dimension $n \geq 2$. Falls $\sigma(\mathfrak{g}) \not\equiv 0 \pmod{4}$, dann ist $n = 3$ und \mathfrak{g} isomorph zu einer der beiden folgenden Lie-Algebren:

- (1) der Heisenberg Lie-Algebra $\mathfrak{n}_3(K)$.
- (2) der einfachen Lie-Algebra mit Basis (x, y, z) und Lie Klammern $[x, y] = z$, $[x, z] = \alpha y$ und $[y, z] = \beta x$, für $\alpha, \beta \neq 0$ in K .

3.3. Kohomologische Dimension

Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einem Körper K .

DEFINITION 3.3.1. Die *kohomologische Dimension* $cd(\mathfrak{g})$ von \mathfrak{g} ist das Supremum aller Zahlen $d \in \mathbb{N}$, für die $H^d(\mathfrak{g}, M) \neq 0$ für irgendeinen \mathfrak{g} -Modul M gilt.

Man beachte, daß wir die Kategorie *aller* \mathfrak{g} -Moduln betrachten, auch die unendlich-dimensionalen \mathfrak{g} -Moduln. Für endlich-dimensionale Lie-Algebren \mathfrak{g} existiert auch eine speziellere Definition von kohomologischer Dimension, siehe [2]: sei $cd(\mathfrak{g})$ die größte natürliche Zahl, für die $H^{cd(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}, K) \neq 0$ gilt. Wir wollen vorübergehend diese Definition zugrundelegen. Sei \mathfrak{g} also endlich-dimensional. Es sei $K = \mathbb{R}$. Es ist wohlbekannt, daß die Gleichheit $cd(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g})$ genau dann gilt, wenn \mathfrak{g} unimodular ist [20]. Also gilt meistens $cd(\mathfrak{g}) < \dim(\mathfrak{g})$. Interessanterweise sind Algebren mit $cd(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$ auch relativ selten. Das einfachste Beispiel mit dieser Eigenschaft ist die Lie-Algebra $\mathfrak{r}_2(\mathbb{R}) = \langle x, y \mid [x, y] = y \rangle$.

DEFINITION 3.3.2. Eine Erweiterung $0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b} \rightarrow 0$ von Lie-Algebren heißt *unimodular*, falls $\text{tr ad } x|_{\mathfrak{a}} = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt.

Es gilt nun folgender Satz [2]:

THEOREM 3.3.3. Es gilt $cd(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$ genau dann, wenn \mathfrak{g} eine unimodulare Erweiterung von $\mathfrak{r}_2(\mathbb{R})$ ist.

KOROLLAR 3.3.4. Sei \mathfrak{g} eine 3-dimensionale reelle Lie-Algebra mit $cd(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$. Dann gilt $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{r}_2(\mathbb{R})$.

Im folgenden verwenden wir jetzt wieder die allgemeinere Definition von $cd(\mathfrak{g})$. Demnach hat eine Lie-Algebra \mathfrak{g} kohomologische Dimension 1, wenn $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jeden \mathfrak{g} -Modul M gilt. Das bedeutet, jede kurze exakte Sequenz von Lie-Algebren $0 \rightarrow M \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$ zerfällt. Außerdem sind auch alle höheren Kohomologiegruppen gleich Null.

SATZ 3.3.5. *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Lie-Algebra mit $cd(\mathfrak{g}) = 1$. Dann ist \mathfrak{g} eindimensional.*

Der Beweis ist nicht schwierig. Zunächst reduziert man den allgemeinen Fall darauf, daß K algebraisch abgeschlossen ist. Dann beweist man das Resultat mit Induktion über $n = \dim \mathfrak{g}$. Hat \mathfrak{g} kohomologische Dimension 1, dann auch jede Unter algebra von \mathfrak{g} . Das folgt aus Shapiros Lemma über die Kohomologie koinduzierter \mathfrak{g} -Moduln. Wegen des Satzes haben also alle endlich-dimensionalen Unter algebren einer Lie-Algebra \mathfrak{g} mit $cd(\mathfrak{g}) = 1$ ebenfalls wieder kohomologische Dimension 1.

Eine freie Lie-Algebra hat immer kohomologische Dimension 1, wegen ihrer universellen Eigenschaft. Ob auch die Umkehrung stimmt, war lange eine offene Frage. Feldman zeigte 1983, daß jede Lie-Algebra der kohomologischen Dimension 1, die von zwei Elementen erzeugt wird, frei ist. Schließlich wurden Gegenbeispiele in Charakteristik $p > 2$ gefunden: nicht-freie Lie-Algebren, von 3 Elementen erzeugt, die dennoch kohomologische Dimension 1 haben, siehe [22]. Ob solche Gegenbeispiele auch in Charakteristik Null existieren, ist unbekannt.

DEFINITION 3.3.6. Sei R ein Ring und M ein R -Modul. Die projektive Dimension $pd(M)$ von M ist die kleinste Zahl n , wenn sie existiert, so daß es eine Auflösung von M gibt mit projektiven R -Moduln:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Die injektive Dimension $id(M)$ von M ist die kleinste Zahl n , wenn sie existiert, so daß es eine Auflösung von M gibt mit injektiven R -Moduln:

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^n \rightarrow 0$$

Gibt es keine endliche Auflösung dieser Art, setzt man $pd(M)$ bzw. $id(M)$ gleich ∞ .

THEOREM 3.3.7. *Sei R ein Ring. Die folgenden Zahlen stimmen immer überein:*

- (1) $\sup\{id(M) \mid M \in \mathcal{M}_R\}$
- (2) $\sup\{pd(M) \mid M \in \mathcal{M}_R\}$
- (3) $\sup\{d \mid \text{Ext}_R^d(A, B) \neq 0 \text{ für irgendwelche } R\text{-Moduln } A, B\}$

Diese Zahl heißt die globale Dimension von R , oder auch die homologische Dimension von R .

Wir haben den folgenden Satz, siehe [28], Exercise 7.3.5:

SATZ 3.3.8. *Die kohomologische Dimension $cd(\mathfrak{g})$ von \mathfrak{g} stimmt mit der globalen Dimension von $U(\mathfrak{g})$ überein.*

Sei \mathfrak{g} eine n -dimensionale Lie-Algebra. Dann kann man zeigen, daß die globale Dimension von $U(\mathfrak{g})$ gleich n ist. Das übersetzt sich dann wie folgt für die kohomologische Dimension von \mathfrak{g} :

SATZ 3.3.9. *Sei \mathfrak{g} eine n -dimensionale Lie-Algebra. Dann gilt $cd(\mathfrak{g}) = n$.*

Offenbar ist $H^q(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jeden \mathfrak{g} -Modul M für $q > n$, weil dann $\Lambda^q(\mathfrak{g}) = 0$ ist. Der Punkt ist also zu zeigen, daß es einen \mathfrak{g} -Modul M gibt mit $H^n(\mathfrak{g}, M) \neq 0$.

3.4. Betti-Zahlen nilpotenter Lie-Algebren

Über die Betti-Zahlen $b_i(\mathfrak{g})$ einer nilpotenten Lie-Algebra \mathfrak{g} gibt es viele ungelöste Fragen, selbst für den Fall, daß \mathfrak{g} endlich-dimensional ist. Insbesondere versucht man, Abschätzungen von Betti-Zahlen zu gewinnen. Oft hat man schon Resultate in dieser Richtung für Gruppen, die man dann auf die Situation von Lie-Algebren übertragen möchte.

Ein Beispiel hierfür ist das Golod-Shafarevich Theorem für p -Gruppen. Ist G eine endliche p -Gruppe, so bezeichnen wir mit $d(G)$ die minimale Anzahl von Erzeugern für G , und mit $r(G)$ die minimale Anzahl von Relationen zwischen diesen Erzeugern in der zugehörigen freien Pro- p -Gruppe. Kohomologisch ausgedrückt bedeutet das

$$\begin{aligned} d(G) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p) \\ r(G) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G, \mathbb{F}_p) \end{aligned}$$

Dann hat man das folgende Resultat

THEOREM 3.4.1 (Golod-Shafarevich). *Für jede endliche p -Gruppe gilt*

$$r(G) > \frac{d(G)^2}{4}$$

Für eine endlich-dimensionale Lie-Algebra \mathfrak{g} ist die Kardinalität eines minimalen Erzeugendensystems gleich

$$\dim(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \dim H_1(\mathfrak{g}, K) = \dim H^1(\mathfrak{g}, K) = b_1(\mathfrak{g}).$$

Ebenso ist die Kardinalität eines minimalen Relationensystems durch $\dim H^2(\mathfrak{g}, K) = b_2(\mathfrak{g})$ gegeben. In Analogie zu dem Theorem von Golod-Shafarevich gilt:

THEOREM 3.4.2. *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale nilpotente Lie-Algebra. Dann gilt*

$$b_2(\mathfrak{g}) > \frac{b_1(\mathfrak{g})^2}{4}$$

Das Theorem wurde 1977 von Koch [19] bewiesen, geriet dann aber offenbar wieder in Vergessenheit. In einer Arbeit von 1997 wurde das Resultat als b_2 -Vermutung formuliert, siehe [8]. Eine weitere Abschätzung von Betti-Zahlen dagegen gilt bisher noch als Vermutung: die sogenannte "toral rank conjecture" (TRC) für nilpotente Lie-Algebren über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Sie besagt, daß

$$\sum_{p=0}^n b_p(\mathfrak{g}) \geq 2^{\dim Z(\mathfrak{g})}$$

wobei $Z(\mathfrak{g})$ das Zentrum von \mathfrak{g} bezeichnet. Der toroidale Rank $rk(M)$ einer glatten Mannigfaltigkeit M ist die Dimension des größten Torus, der fast frei auf M operiert. Halperin hat 1968 vermutet, daß

$$\dim H^*(M) \geq 2^{rk(M)}$$

gilt. Der Zusammenhang mit nilpotenten Lie-Algebren ist wie folgt. Ist N eine nilpotente Lie-Gruppe und Γ eine diskrete kokompakte Untergruppe, dann ist $M = N/\Gamma$ eine Nilmannigfaltigkeit. Deren toraler Rank ist aber genau $\dim Z(N)$. Für nilpotente Lie-Algebren, die ein Modell einer Nilmannigfaltigkeit sind, würde also die Vermutung von Halperin die TRC implizieren. Allerdings gibt es genügend Lie-Algebren, die kein Modell einer Nilmannigfaltigkeit sind, nämlich solche, für die kein Basiswechsel zu rationalen Strukturkonstanten führt. Schon in Dimension 7 gibt es unendlich viele solche nicht-rationale nilpotente Lie-Algebren. Daher

ist es auch keineswegs klar, ob die TRC in dieser Allgemeinheit richtig ist. Andererseits ist die Vermutung aber in einigen Spezialfällen bewiesen, siehe [7]:

THEOREM 3.4.3. *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale nilpotente Lie-Algebra, so daß eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- (1) $\dim Z(\mathfrak{g}) \leq 5$,
- (2) $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) \leq 7$
- (3) $\dim \mathfrak{g} \leq 14$
- (4) \mathfrak{g} ist 2-stufig nilpotent.

Dann gilt die TRC, d.h., $\sum_{p=0}^n b_p(\mathfrak{g}) \geq 2^{\dim Z(\mathfrak{g})}$.

In vielen Fällen ist die Abschätzung aber nicht sehr gut. Ist \mathfrak{g} zweistufig nilpotent, so kann man die Abschätzung zum Beispiel wie folgt verbessern, siehe [26]:

THEOREM 3.4.4. *Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale 2-stufig nilpotente Lie-Algebra und \mathfrak{v} ein Komplement von $Z(\mathfrak{g})$ in \mathfrak{g} . Dann folgt*

$$\sum_{p=0}^n b_p(\mathfrak{g}) \geq 2^t, \quad t = \dim Z(\mathfrak{g}) + \left\lfloor \frac{\dim \mathfrak{v} + 1}{2} \right\rfloor$$

Im allgemeinen hat man folgende obere Schranke für die Betti-Zahlen, siehe [7]:

THEOREM 3.4.5. *Sei \mathfrak{g} eine nicht-abelsche nilpotente Lie-Algebra der Dimension $n \geq 3$, dann gilt für $p = 1, \dots, n-1$*

$$b_p(\mathfrak{g}) \leq \binom{n}{p} - \binom{n-2}{p-1}$$

Für die Lie-Algebra $\mathfrak{n}_3(K) \oplus K^{n-3}$ gilt sogar Gleichheit. In [7] werden auch untere Schranken angegeben, die aber sehr schwer wiederzugeben sind. In bestimmten Fällen existieren explizite Formeln für die Betti-Zahlen.

THEOREM 3.4.6 (Santharoubane). *Sei \mathfrak{h}_n die $2n+1$ -dimensionale Heisenberg Lie-Algebra. Dann gilt für alle $0 \leq p \leq n$*

$$b_p(\mathfrak{h}_n) = \binom{2n}{p} - \binom{2n}{p-2}$$

Man beachte, daß die fehlenden Betti-Zahlen durch die Poincaré Dualität gegeben sind. In [1] findet man folgende Formel:

THEOREM 3.4.7. *Sei \mathfrak{g}_n die Lie-Algebra mit Basis (x_i, y_i, z) , $1 \leq i \leq n$ und Klammern $[z, x_i] = y_i$. Dann gilt für alle $0 \leq p \leq 2n+1$*

$$b_p(\mathfrak{g}_n) = \binom{n+1}{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$$

Ist \mathfrak{g} eine komplexe nilpotente Lie-Algebra, die ein abelsches Ideal der Kodimension 1 enthält, dann gibt es eine rekursive Formel für die $b_p(\mathfrak{g})$ mit Partitionen [3]. Ein Spezialfall einer solchen Lie-Algebra ist die Standardgraduierte filiforme Lie-Algebra \mathfrak{f}_{n+1} . Sie ist definiert durch

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n$$

wobei $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ eine Basis von \mathfrak{f}_{n+1} ist.

SATZ 3.4.8. Die p -te Betti-Zahl von \mathfrak{f}_{n+1} ist gegeben durch

$$b_p(\mathfrak{f}_{n+1}) = P_{p,n} + P_{p-1,n}$$

für $1 \leq p \leq n+1$, wobei $P_{0,n} = 1$ und

$$P_{p,n} = \#\left\{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p \mid 1 \leq a_1 < \dots < a_p \leq n, \sum_{j=1}^p a_j = \left\lceil \frac{p(n+1)}{2} \right\rceil \right\}$$

Für kleine p erhält man daraus explizite Formeln für die Betti-Zahlen $b_p(\mathfrak{f}_n)$:

$$\begin{aligned} b_1(\mathfrak{f}_n) &= 2 \\ b_2(\mathfrak{f}_n) &= \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \\ b_3(\mathfrak{f}_n) &= \left\lfloor \binom{\frac{n+1}{2}}{2} + \frac{1}{8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{8} \right\rfloor, \\ b_4(\mathfrak{f}_n) &= \left\lfloor \frac{4}{3} \binom{\frac{n+1}{2}}{3} + \frac{4n+13}{36} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^3 + 18}{36} \right\rfloor \end{aligned}$$

Die Formeln erhält man wie folgt: der q -Binomialkoeffizient ist definiert als

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 - q^{n-i}}{1 - q^{i+1}}$$

Nun kann man sich die Definition der Mengen $P_{p,n}$ als restringierte Partitionen umschreiben:

$$\begin{aligned} P_{p,n} &= \#\left\{ (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{Z}^p \mid 1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_p \leq n-p+1, \sum_{j=1}^p b_j = s_p \right\}, \\ s_p &:= \left\lceil \frac{p(n+1)}{2} \right\rceil - \frac{p(p-1)}{2}. \end{aligned}$$

Dann ist $P_{p,n}$ gegeben durch den Koeffizienten von x^{s_p} in der Reihenentwicklung von

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ p \end{bmatrix}_x - \begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix}_x.$$

Damit kann man die Zahlen $P_{p,n}$ sehr gut ausrechnen. Für kleine p kann man sogar die erzeugenden Funktionen bestimmen. Damit kann man dann explizite Formeln durch Partialbruchzerlegung ableiten. Die erzeugende Funktion von $P_{2,n}$ ist zum Beispiel gegeben durch

$$\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} = x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + \dots +$$

Natürlich gilt $P_{1,n} = 1$ und $P_{2,n} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} P_{3,n} &= \left\lfloor \frac{(n-1)^2 + 4}{8} \right\rfloor \\ P_{4,n} &= \left\lfloor \frac{(n-2)^3 + \frac{3}{2}(n-1)^2 + 18}{36} \right\rfloor \end{aligned}$$

Die erzeugenden Funktionen von $P_{1,n}, \dots, P_{7,n}$ sind wie folgt:

$$P_{1,n} : 1$$

$$P_{2,n} : \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$P_{3,n} : \frac{x^3(1-x^6)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$P_{4,n} : \frac{x^4(1+x^3)}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)}$$

$$P_{5,n} : \frac{x^5(1+x)f_5(x)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)}$$

$$P_{6,n} : \frac{x^6(1+x^2+3x^3+4x^4+4x^5+3x^7+x^8+x^{10})}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

$$P_{7,n} : \frac{x^7 f_7(x)}{g_7(x)}$$

wobei

$$f_5(x) = x^{14} - x^{13} + 2x^{12} + x^{11} + 2x^{10} + 3x^9 + x^8 + 5x^7 + x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$\begin{aligned} f_7(x) = & 1 - x + 3x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 12x^5 + 16x^6 + 28x^7 + 33x^8 + 46x^9 + 56x^{10} + 73x^{11} \\ & + 83x^{12} + 90x^{13} + 106x^{14} + 109x^{15} + 121x^{16} + 110x^{17} + 121x^{18} + 109x^{19} + 106x^{20} \\ & + 90x^{21} + 83x^{22} + 73x^{23} + 56x^{24} + 46x^{25} + 33x^{26} + 28x^{27} + 16x^{28} + 12x^{29} + 7x^{30} \\ & + 3x^{31} + 3x^{32} - x^{33} + x^{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_7(x) = & (1-x)^7(1+x)^5(1+x^2)^3(1-x+x^2)^2(1+x+x^2)^2(1+x^4)(1-x^2+x^4) \\ & (1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4). \end{aligned}$$

Damit kann man dann beliebig viele Folgenglieder ausrechnen. Die Folge $(P_{5,n})$, $n \geq 5$ beginnt etwa mit

(1, 1, 3, 6, 12, 20, 32, 49, 73, 102, 141, 190, 252, 325, 414, 521, 649, 795, 967, 1165,
1394, 1651, 1944, 2275, 2649, 3061, 3523, 4035, 4604, 5225, 5910, 6660,
7483, 8372, 9343, 10395, 11538, 12764, 14090, 15516, 17053, 18691, 20451,
22330, 24342, 26476, 28754, 31174, 33751, 36471, 39361, 42416, 45654, 49060,
52662, 56455, 60459, 64656, 69079, 73720, 78602, 83705, 89064,
94671, 100551, 106681, ...)

Auf diese Weise können wir dann auch die Betti-Zahlen leicht ausrechnen. Zum Beispiel sind die Betti-Zahlen von \mathfrak{f}_n für $3 \leq n \leq 15$ wie folgt:

n	(b_0, \dots, b_n)
3	(1, 2, 2, 1)
4	(1, 2, 2, 2, 1)
5	(1, 2, 3, 3, 2, 1)
6	(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)
7	(1, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 1)
8	(1, 2, 4, 8, 10, 8, 4, 2, 1)
9	(1, 2, 5, 10, 14, 14, 10, 5, 2, 1)
10	(1, 2, 5, 12, 20, 24, 20, 12, 5, 2, 1)
11	(1, 2, 6, 15, 28, 38, 38, 28, 15, 6, 2, 1)
12	(1, 2, 6, 18, 37, 56, 64, 56, 37, 18, 6, 2, 1)
13	(1, 2, 7, 21, 48, 82, 107, 107, 82, 48, 21, 7, 2, 1)
14	(1, 2, 7, 24, 61, 116, 167, 188, 167, 116, 61, 24, 7, 2, 1)
15	(1, 2, 8, 28, 76, 157, 253, 320, 320, 253, 157, 76, 28, 8, 2, 1)

Im allgemeinen Fall kann man keine explizite Formel für $b_p(\mathfrak{f}_n)$ erwarten. Interessant an der Folge der Zahlen (b_0, b_1, \dots, b_n) ist hier, daß sie unimodal ist.

DEFINITION 3.4.9. Eine Folge (a_0, a_1, \dots, a_d) von reellen Zahlen heißt *unimodal*, falls es ein j gibt mit $0 \leq j \leq d$, so daß $a_i \leq a_{i+1}$ für alle $i = 0, \dots, j-1$ und $a_i \geq a_{i+1}$ gilt für alle $i = j, \dots, d-1$. Sie heißt *log-konkav*, falls

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$$

für alle $i = 1, \dots, d-1$ gilt.

Eine log-konkave Folge positiver Terme ist unimodal. Es gilt [3]:

THEOREM 3.4.10. Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale nilpotente komplexe Lie-Algebra, die ein abelsches Ideal der Kodimension 1 besitzt. Dann ist die Folge der Betti-Zahlen unimodal. Insbesondere ist die Folge der Betti-Zahlen von \mathfrak{f}_n unimodal.

Es gibt sogar eine Formel für die Betti-Zahlen, die die obige Formel für $b_p(\mathfrak{f}_n)$ verallgemeinert, siehe [3]. Eine naheliegende Frage ist es auch, wann die Betti-Zahlen von Lie-Algebren nicht nur unimodal, sondern sogar log-konkav sind.

VERMUTUNG 3.4.11. Die Folge der Betti-Zahlen $(b_1(\mathfrak{f}_n), \dots, b_{n-1}(\mathfrak{f}_n))$ ist log-konkav, d.h., es gilt $b_i^2 \geq b_{i-1}b_{i+1}$ für alle $2 \leq i \leq n-2$.

Man beachte, daß natürlich $b_1^2 \geq b_0b_2$, oder $4 \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ nicht stimmen kann, sobald $n \geq 9$ ist. Deshalb muß man b_0, b_n in der Folge weglassen.

Die Folge der Betti-Zahlen (b_0, b_1, \dots, b_n) ist aber nicht für alle nilpotenten Lie-Algebren unimodal. Man sieht leicht, daß die Heisenberg Lie-Algebren \mathfrak{h}_n eine Familie von Lie-Algebren bildet, deren Folge der Betti-Zahlen nicht unimodal ist. In der Tat hat man genau ein Minimum in der Mitte. Für n gerade seien \mathfrak{t}_n die filiformen Lie-Algebren mit Basis (x_1, \dots, x_n) und Lie-Klammern

$$\begin{aligned} [x_1, x_i] &= x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1 \\ [x_j, x_{n-j+1}] &= (-1)^{j+1} x_n, & 2 \leq j \leq n/2 \end{aligned}$$

Dann zeigen die Betti-Zahlen $b_p(\mathfrak{t}_n)$ ein ähnliches Verhalten wie die der Heisenberg Lie-Algebren. Hier sind einige numerische Beispiele, die von Hannes Pouseele berechnet worden sind. Aus

Platzgründen geben wir die Zahlen nur bis zum Index $n/2$ an. Die andere Hälfte folgt ja aus der Symmetrie.

n	$(b_0, b_1, \dots, b_{\frac{n}{2}})$
4	(1, 2, 2)
6	(1, 2, 2, 2)
8	(1, 2, 3, 4, 4)
10	(1, 2, 4, 8, 9, 8)
12	(1, 2, 5, 13, 22, 23, 20)
14	(1, 2, 6, 19, 41, 61, 59, 50)
16	(1, 2, 7, 26, 68, 129, 177, 163, 134)
18	(1, 2, 8, 34, 105, 240, 414, 530, 466, 376)
20	(1, 2, 9, 43, 152, 406, 839, 1342, 1630, 1388, 1100)
22	(1, 2, 10, 53, 211, 643, 1541, 2929, 4410, 5129, 4243, 3320)
24	(1, 2, 11, 64, 284, 970, 2636, 5773, 10252, 14657, 16430, 13278, 10260)

Es sieht so aus, als ob diese Folge für kein $n \geq 10$ unimodal ist. Einen Beweis scheint es aber noch nicht zu geben.

Bibliography

- [1] G. F. Armstrong, G. Cairns, B. Jessup: *Explicit Betti numbers for a family of nilpotent Lie algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 381–385.
- [2] G. F. Armstrong, G. Cairns, G. Kim: *Lie algebras of cohomological codimension one*. Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 709–714.
- [3] G. F. Armstrong, S. Sigg: *On the cohomology of a class of nilpotent Lie algebras*. Bull. Austral. Math. Soc. **54** (1996), 517–527.
- [4] *Algèbres de Lie rigides*. Proceedings of the colloquium, Tashkent, Uzbekistan, 1997. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1998), 65–91.
- [5] E. Cartan, S. Eilenberg: *Homological algebra*. Princeton University Press **1956**.
- [6] G. Cairns, G. Kim: *The mod 4 behaviour of total Lie algebra cohomology*. Arch. Math. **77** (2001), 177–180.
- [7] G. Cairns, B. Jessup: *New bounds on the Betti numbers of nilpotent Lie algebras*. Comm. Algebra **25** (1997), 415–430.
- [8] G. Cairns, B. Jessup, J. Pitkethly: *On the Betti numbers of nilpotent Lie algebras of small dimension*. Prog. Math. **145** (1997), 19–31.
- [9] C. Chevalley, S. Eilenberg: *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*. Trans. AMS **63** (1948), 85–124.
- [10] J. Dixmier: *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes*. Acta Sci. Math. Szeged **16** (1955), 246–250.
- [11] R. Farnsteiner, H. Strade: *Shapiro’s lemma and its consequences in the cohomology theory of modular Lie algebras*. Math. Z. **206** (1991), 153–168.
- [12] M. Gerstenhaber: *On the deformation of rings and algebras*. Ann. of Math. **79** (1964), 59–104.
- [13] M. Gerstenhaber: *On the deformation of rings and algebras: II*. Ann. of Math. **84** (1966), 1–19.
- [14] J. Hilgert, K. H. Neeb: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Braunschweig: Vieweg Verlag **1991**.
- [15] P. S. Hilton, U. Stambach: *A Course in Homological Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag **1997**.
- [16] N. Jacobson: *Lie algebras*. Wiley and Sons **1962**.
- [17] N. Jacobson: *A note on automorphisms and derivations of Lie algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, (1955), 281–283.
- [18] A. W. Knap: *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*. Princeton University Press **1988**.
- [19] H. Koch: *Generator and reation ranks for finite-dimensional nilpotent Lie algebras*. Algebra Logic **16** (1978), 246–253.
- [20] J.-J. Koszul: *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*. Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 65–127.
- [21] A. Nijenhuis, R. W. Richardson: *Deformations of Lie algebra structures*. J. Math. Mech. **17** (1967), 89–105.
- [22] A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, A. A. Zolotikh: *An example of a non-free Lie algebra of cohomological dimension 1*. Russ. Math. Surveys. **49**, (1994), 254–255.
- [23] T. Pirashvili: *The Euler-Poincaré characteristic of a Lie algebra*. J. Lie Theory. **8**, (1998), 429–431.
- [24] G. Rauch: *Effacement et deformation*, Ann. Inst. Fourier **22** (1972), 239–269.
- [25] J. J. Rotman: *Advanced modern algebra*. Pearson Education Upper Saddle River, New York **2002**.
- [26] P. Tirao: *A refinement of the toral rank conjecture for 2-step nilpotent Lie algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **128**, (2000), 2875–2878.
- [27] F. Wagemann: *On Lie algebra crossed modules*. Comm. in Algebra **34**, (2006), 1699–1722.
- [28] C. A. Weibel: *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press **1997**.
- [29] M. Vergne: *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l’étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*. Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 81–116.