9. Konservative Methoden für nichtlineare Probleme

Eine Methode, die für

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

konsistent ist, ist auch für

$$(u^2)_t + \left(\frac{2u^3}{3}\right)_x = 0$$

konsistent. Sie kann aber klarerweise nicht schwache Lösungen von beiden Gleichungen approximieren.

Beispiel : Eine Verallgemeinerung der Upwind-Methode zur Berechnung nichtnegativer Lösungen der Burgersgleichung ist

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n)\,. \tag{9.1}$$

Diskrete Version des Riemann-Problems:

$$U_j^0 = \begin{cases} 1 & j < 0, \\ 0 & j \geq 0 \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $U^n = U^0 \; \forall n > 0$. Für $k \to 0$ konvergiert die numerische Lösung gegen eine Stoßwelle mit Geschwindigkeit 0. Das ist keine schwache Lösung der Burgersgleichung. Die exakte Lösung ist eine Stoßwelle mit Geschwindigkeit 1/2.

Definition. *a) Eine Methode heißt* **konservativ***, wenn sie in der Form*

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h}\big(\mathbf{F}(\mathbf{U}^n; j) - \mathbf{F}(\mathbf{U}^n; j-1)\big) \tag{9.2}$$

mit dem **numerischen Fluß**

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}; j) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-p}, \mathbf{U}_{j-p+1}, \cdots, \mathbf{U}_{j+q})$$

geschrieben werden kann.
b) Eine konservative Methode heißt **konsistent***, wenn* $\mathbf{F}$ *Lipschitzstetig ist und*

$$\mathbf{F}(\overline{u}, \cdots, \overline{u}) = f(\overline{u})$$

gilt.

Integriert man $\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0$ über das Rechteck $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$, so läßt sich das Resultat schreiben als

$$\overline{\mathbf{u}}_j^{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_j^n - \frac{k}{h}(\overline{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n - \overline{\mathbf{f}}_{j-1/2}^n)\,, \qquad \overline{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n = \frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}\big(\mathbf{u}(x_{j+1/2}, t)\big)\, dt\,.$$

Interpretiert man also die $\mathbf{U}_j^n$ als Approximationen für $\overline{\mathbf{u}}_j^n$, dann kann für eine konservative Methode der numerische Fluß $\mathbf{F}(\mathbf{U}^n; j)$ als Näherung für den Mittelwert $\overline{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n$ des Flusses an der Stelle $x_{j+1/2}$ über das Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ angesehen werden.

Alle in Kapitel 7 präsentierten Einschrittverfahren für lineare Probleme sind konservativ und konsistent.

Beispiel : Numerischer Fluß für das Beam-Warming-Verfahren:

$$F(\mathbf{U}; j) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(3\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1}) - \frac{k}{2h}\mathbf{A}^2(\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1})$$

Für alle anderen Verfahren aus Kapitel 7 gilt $\mathbf{F}(\mathbf{U}; j) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1})$.

Die Diskretisierung (9.1) ist eine nichtkonservative Verallgemeinerung des Verfahrens mit linksseitigen Differenzen auf die Burgersgleichung. Im Folgenden listen wir konservative, konsistente Verallgemeinerungen von Verfahren für lineare Probleme auf nichtlineare Probleme auf:
Linksseitige Differenzen:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1}^n)\big)\,, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}_j)$$

Rechtsseitige Differenzen:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n)\big)\,, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1})$$

Lax-Friedrichs:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{n+1} =& \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{U}_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1}^n)\big)\,, \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) =& \frac{h}{2k}(\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j+1}) + \frac{1}{2}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1})\big) \end{aligned}$$

Schwieriger ist die Verallgemeinerung von Verfahren höherer Ordnung. Für das Lax-Wendroff-Verfahren ist eine Möglichkeit gegeben durch

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{2h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1}^n)\big) + \frac{k^2}{2h^2}\big[\mathbf{A}_{j+1/2}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n)\big) - \mathbf{A}_{j-1/2}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1}^n)\big)\big]\,,$$

mit $\mathbf{A}_{j\pm1/2} = \mathbf{f}'\big(\frac{1}{2}(\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{j\pm1}^n)\big)$. Andere Verfahren vermeiden die Verwendung der Jacobimatrix durch eine Zweischritt-Prozedur. Zwei Beispiele sind das **Richtmyer-Zweischritt-Lax-Wendroff-Verfahren**

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1/2} =& \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n)\big)\,, \\ \mathbf{U}_j^{n+1} =& \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1/2}^{n+1/2})\big)\,, \end{aligned}$$

und das **MacCormack-Verfahren**

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^* =& \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n)\big)\,, \\ \mathbf{U}_j^{n+1} =& \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_j^*) - \frac{k}{2h}\big(\mathbf{f}(\mathbf{U}_j^*) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1}^*)\big)\,. \end{aligned}$$

Die drei zuletzt präsentierten Verfahren reduzieren sich alle auf das Lax-Wendroff-Verfahren, wenn man sie auf lineare Probleme anwendet.

Satz von Lax-Wendroff. *Für eine Gitterfolge gelte $k_l,\ h_l \to 0$ für $l \to \infty$. Sei weiters $\mathbf{U}_l(x,t)$ eine auf dem l-ten Gitter mit einer konservativen und konsistenten Methode berechnete numerische Lösung. Wenn $\mathbf{U}_l$ im unten beschriebenen Sinn gegen eine Funktion $\mathbf{u}$ konvergiert, dann ist $\mathbf{u}$ eine schwache Lösung des Anfangswertproblemes.*

Bevor ein Beweis des Satzes skizziert wird, wollen wir die Annahmen an die Folge $\mathbf{U}_l$ präzisieren: Die Konvergenz wird bezüglich des Raumes $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ (lokal integrierbare Funktionen) verstanden, d.h.

$$\lim_{l\to\infty} \int_\Omega |\mathbf{U}_l(x,t) - \mathbf{u}(x,t)|\, dx\, dt = 0\,,$$

für alle beschränkten Gebiete $\Omega \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Hier steht $|\,.\,|$ für eine beliebige Vektornorm. Weiters nehmen wir an, daß für jedes Zeitintervall $0 \le t \le T$ die $\mathbf{U}_l(.,t)$ in einer beschränkten Teilmenge des Raumes $BV(\mathbb{R})$ (Funktionen mit beschränkter Variation) liegen, d.h. für alle $T > 0$ existiert $R > 0$, sodaß

$$TV(\mathbf{U}_l(.,t)) \le R\,, \qquad \forall\, 0 \le t \le T,\ l = 1, 2, \cdots\,,$$

wobei die Totalvariation definiert ist durch

$$TV(v) = \sup \sum_{j=1}^{N} |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1})| = \int_{-\infty}^{\infty} |v'(x)|\,dx\,.$$

Das Supremum ist über alle Zerlegungen $-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N = \infty$ der reellen Achse zu nehmen. Die Ableitung v' ist im allgemeinen distributionell zu verstehen. Eine andere äquivalente Definition ist

$$TV(v) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |v(x) - v(x-\varepsilon)|\,dx\,.$$

Beweisskizze. Wir werden zunächst zeigen, daß für die numerische Lösung eine diskrete Version der schwachen Formulierung des Anfangswertproblems gilt. Sei $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ eine Testfunktion. Wir multiplizieren (9.2) mit $\phi_j^n = \phi(x_j, t_n)$ und summieren über alle Orte und Zeiten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j^n (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) = -\frac{k}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j^n [\mathbf{F}(\mathbf{U}^n; j) - \mathbf{F}(\mathbf{U}^n; j-1)]$$

Anwendung von "partieller Summation" ergibt nach Multiplikation mit h

$$hk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{k} \mathbf{U}_j^{n+1} + \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{h} \mathbf{F}(\mathbf{U}^n; j) \right) = -h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j^0 \mathbf{U}_j^0\,. \qquad (9.2)$$

Führt man in (9.2) formal den Grenzübergang $h, k \to 0$ durch, so ergibt sich die schwache Formulierung des Anfangswertproblems. Der Rest des Beweises ist die Rechtfertigung dieses Grenzüberganges für die Folge h_l, k_l.

Zunächst fassen wir die Summen in (9.2) als Integral von stückweise konstanten Funktionen auf. Der erste Term im Integranden auf der linken Seite besteht aus einem Faktor, der für $l \to \infty$ bezüglich der sup-Norm gegen ϕ_t konvergiert, und einem Faktor, der im Sinn von $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ gegen $\mathbf{u}$ konvergiert. Mit Hilfe dieser beiden Eigenschaften kann die Konvergenz des Integrals gegen $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi_t \mathbf{u}\,dx\,dt$ gezeigt werden.

Ebenso konvergiert die rechte Seite von (9.2) gegen $-\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0)\mathbf{u}(x,0)\,dx$, wenn für die diskreten Anfangsbedingungen $\mathbf{U}_j^0 = \overline{\mathbf{u}}_j^0$ gilt.

Der verbleibende Term in (9.2) mit $\mathbf{F}(\mathbf{U}^n; j)$ ist am schwierigsten zu behandeln. Wir beschränken uns darauf festzuhalten, daß hier sowohl die Konsistenz der Methode verwendet wird als auch die Annahme der gleichmäßigen Beschränktheit der Totalvariation der $\mathbf{U}_l$.

Da die Konvergenz für jede Testfunktion ϕ gezeigt werden kann, muß die Grenzfunktion $\mathbf{u}$ wirklich eine schwache Lösung des Anfangswertproblems sein. ■

Zwei Fragen bleiben offen. Erstens die Konvergenz der $\mathbf{U}_l$, im obigen Satz eine Annahme, zweitens ist nicht garantiert, daß die numerisch ermittelte schwache Lösung die Entropielösung ist.

Beispiel : Riemann-Problem für die Burgersgleichung mit den Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Die Entropielösung ist eine Verdünnungswelle. Diskretisierung: Konservative Verallgemeinerung der Upwind-Methode mit

$$F(v,w) = \begin{cases} v^2/2 & v+w \geq 0, \\ w^2/2 & v+w < 0. \end{cases}$$

Diskretisierung der Anfangsdaten:

$$U_j^0 = \begin{cases} -1 & j \leq 0, \\ 1 & j > 0. \end{cases}$$

Die numerische Lösung $U_k(x,t) = U_k(x,0)$ konvergiert gegen $u(x,t) = u_0(x)$. Das ist eine schwache, aber nicht die Entropielösung.

Ein Fehlverhalten wie im obigen Beispiel tritt oft dann auf, wenn die Entropielösung eine Verdünnungswelle enthält, in der die Wellengeschwindigkeit einen Nulldurchgang hat. Eine solche Lösung wird **transonische Verdünnung** genannt.

Will man zeigen, daß eine numerische Lösung die Entropielösung approximiert, so besteht eine Möglichkeit darin, eine diskrete Entropiebedingung herzuleiten. Man könnte zum Beispiel zeigen, daß für die numerische Lösung eine Ungleichung der Form

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \eta(\mathbf{U}_j^n) - \frac{k}{h}[\Psi(\mathbf{U}^n; j) - \Psi(\mathbf{U}^n; j-1)]$$

gilt, wobei $\eta(\mathbf{u})$ eine Entropiefunktion und Ψ ein numerischer Entropiefluß, konsistent mit ψ, sind. Mit einer Konvergenzannahme wie im Satz von Lax-Wendroff kann dann analog zum Beweis dieses Satzes gezeigt werden, daß die Grenzlösung die Entropiebedingung erfüllt.

Beispiel : Für die Eulergleichungen ist $\eta = -\rho S$ eine Entropiefunktion mit Entropiefluß $\psi = -\rho S v$. Man kann zeigen, daß η als Funktion der Variablen ρ, ρv und E konvex ist.