

Die van der Pol-Gleichung

Die Schwingungen gewisser selbsterregter Systeme werden durch die van der Pol-Gleichung

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad (1)$$

beschrieben. Diese Gleichung ist in dimensionsloser Form. Der dimensionslose Parameter ε ist positiv. Wir betrachten das Anfangswertproblem für (1) mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = \bar{x}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (2)$$

und interessieren uns für das Verhalten der Lösung für $t \rightarrow \infty$.

Um ein erstes Gefühl für mögliches Lösungsverhalten zu bekommen, betrachten wir zunächst die einfachere Gleichung

$$\ddot{x} + x = A\dot{x},$$

mit konstantem A . Für negative A beschreibt sie kleine Schwingungen eines Pendels mit Reibung. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 1 = A\lambda$ hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = A/2 \pm \sqrt{A^2/4 - 1}$. Für beide Eigenwerte ist das Vorzeichen des Realteils gleich dem Vorzeichen von A . Der stationäre Punkt $x = 0$ ist also für negatives A stabil und für positives A instabil (und für $A^2/4 < 1$ eine Spirale bzw. für $A^2/4 \geq 1$ ein Knoten). In der van der Pol-Gleichung ist die Konstante A ersetzt durch den nichtlinearen Ausdruck $\varepsilon(1 - x^2)$, der für kleine $|x|$ positiv und für große $|x|$ negativ ist. Wir erwarten daher, dass der stationäre Punkt $x = 0$ instabil ist (was die Linearisierung $\ddot{z} + z = \varepsilon\dot{z}$ beweist), dass allerdings große Schwingungen gedämpft werden.

Mehr Information werden wir uns mit Hilfe der Annahme erarbeiten, dass der Parameter ε sehr klein ist ($\varepsilon \ll 1$), d.h. dass wir die van der Pol-Gleichung als Störung des (uns schon vertrauten) harmonischen Oszillators betrachten. Wir versuchen die Lösung durch eine *asymptotische Entwicklung* in Potenzen von ε darzustellen, d.h. wir machen einen Ansatz der Form

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k(t) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

wobei, im Unterschied zu (oder auch wie bei!?) Taylorreihen, die Idee darin besteht, eine feste endliche Anzahl von Termen als Approximation zu verwenden, und nicht eine unendliche Reihe zu summieren.

Die Vorgangsweise besteht nun darin, den Ansatz in das Problem (1), (2) einzusetzen, die einzelnen Terme nach Potenzen von ε zu ordnen und durch

Koeffizientenvergleich Gleichungen für die Koeffizientenfunktionen $x_k(t)$ zu ermitteln.

Für den führenden Koeffizienten ergibt sich das sogenannte *reduzierte Problem*

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(0) = \bar{x}, \quad \dot{x}_0(0) = 0,$$

mit der Lösung

$$x_0(t) = \bar{x} \cos t.$$

Das *Residuum* (d.h. der Fehler) bei Einsetzen in (1)

$$\varepsilon(1 - x_0^2)\dot{x}_0 = -\varepsilon(1 - \bar{x}^2 \cos^2 t)\bar{x} \sin t$$

ist $O(\varepsilon)$, und daher bezeichnet man x_0 als *formale Näherung* für die Lösung von (1), (2). Der Korrekturterm x_1 ist Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= \bar{x} \left(\frac{\bar{x}^2}{4} - 1 \right) \sin t + \frac{\bar{x}^3}{4} \sin 3t, \\ x_1(0) &= \dot{x}_1(0) = 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich erzeugt der erste Summand in der Inhomogenität Resonanz. Die Lösung ist

$$x_1(t) = \frac{\bar{x}}{2} \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{4} \right) (t \cos t - \sin t) + \frac{\bar{x}^3}{32} (3 \sin t - \sin 3t).$$

Da $x_1(t)$ unbeschränkt ist, ist die "verbesserte" Näherung $x_0 + \varepsilon x_1$, auf dem Intervall $[0, \infty)$ betrachtet, keine formale Näherung, sehr wohl aber auf einem beschränkten Zeitintervall $[0, T]$. Das Residuum konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ auf $[0, \infty)$ zwar punktweise aber nicht gleichmäßig gegen Null.

Wir sind nun mit zwei Fragen konfrontiert:

- 1) Wie zeigt man, dass eine formale Näherung wirklich eine Näherung für eine Lösung des Problems ist?
- 2) Was ist bei der Approximation des Langzeitverhaltens der van der Pol-Gleichung schief gegangen?

Gültigkeit formaler asymptotischer Näherungen

Wir beschäftigen uns zunächst mit der ersten Frage. Dass Kleinheit des Residuums im Allgemeinen für die Gültigkeit einer formalen Näherung nicht hinreichend ist, zeigt das folgende Beispiel.

In der ersten Gleichung des Systems

$$0,01x + y = 0,1, \quad x + 101y = 11 \quad (3)$$

ist der Koeffizient von x klein im Vergleich zum Koeffizienten von y . Vernachlässigung des Termes $0,01x$ führt auf die Näherungslösung

$$x_0 = 0,9, \quad y_0 = 0,1. \quad (4)$$

Das Residuum ist der Vektor $r = (0,009, 0)^{tr}$. Trotz der Kleinheit des Residuums ist die exakte Lösung

$$x = -90, \quad y = 1$$

weit von der "Näherung" (4) entfernt. Was sind die Gründe für diesen Fehlschlag? Bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix in (3) mit A und führen wir die Abkürzungen $\mathbf{x} = (x, y)^{tr}$ und $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^{tr}$ ein, dann gilt für den Approximationsfehler

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{x} = A^{-1}r.$$

Die Inverse von A ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10100 & -100 \\ -100 & 1 \end{pmatrix},$$

was den großen Approximationsfehler erklärt. Die Matrix A ist nicht weit von einer singulären Matrix entfernt.

Zu untersuchen ist also, ob das Problem *gut konditioniert* ist, d.h. ob es nicht zu sensitiv auf Änderungen in den Daten reagiert. Ähnliches gilt auch für nichtlineare Probleme. Die Sensitivität wird dann anhand des Verhaltens der Inversen von linearisierten Problemen gemessen.

Im folgenden bezeichnet $(B_1, \|\cdot\|_1)$ einen Banachraum und $(B_2, \|\cdot\|_2)$ einen normierten Raum. Das folgende Resultat gibt hinreichende Bedingungen dafür an, daß aus *Konsistenz* (d.h. Kleinheit des Residuums) *Konvergenz* (d.h. gute Approximationsqualität der formalen Näherung) folgt.

Satz 1 Die Abbildung $F : B_1 \rightarrow B_2$ sei an der Stelle $u_{as} \in B_1$ Frechet-differenzierbar. Die Frechet-Ableitung $DF(u_{as})$ sei invertierbar, und es gelte

$$\|DF(u_{as})^{-1}f\|_1 \leq K\|f\|_2 \quad \forall f \in B_2. \quad (5)$$

Für $P(v) := F(u_{as} + v) - F(u_{as}) - DF(u_{as})v$ gelte

$$\|P(v_1) - P(v_2)\|_2 \leq L\delta\|v_1 - v_2\|_1 \quad \text{für } \|v_1\|_1, \|v_2\|_1 \leq \delta. \quad (6)$$

Gilt außerdem für das Residuum $\varrho := F(u_{as})$

$$\|\varrho\|_2 \leq \frac{1}{4K^2L},$$

dann gibt es eine Lösung der Gleichung $F(u) = 0$, die eindeutig ist in der Kugel $K_{\bar{\delta}}(u_{as}) \subset B_1$ mit Mittelpunkt u_{as} und Radius $\bar{\delta} = \frac{1}{2KL}$, und es gilt

$$\|u - u_{as}\|_1 \leq 2K\|\varrho\|_2. \quad (7)$$

Beweis. Der Beweis ist eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Wir setzen $R = u - u_{as}$. Dann ist das Problem $F(u) = 0$ äquivalent zu

$$F(u_{as} + R) - F(u_{as}) = -\varrho.$$

Das wiederum gilt genau dann, wenn

$$DF(u_{as})R = -\varrho - P(R)$$

gilt. Wir haben also die Lösbarkeit des Fixpunktproblems

$$R = G(R) := -DF(u_{as})^{-1}(\varrho + P(R))$$

zu zeigen. Dazu zeigen wir, daß $G(R)$ in $K_{\bar{\delta}}(0)$ eine Kontraktion ist. Die Abschätzung

$$\|G(R)\|_1 \leq K\|\varrho + P(R)\|_2 \leq K\left(\frac{1}{4K^2L} + L\bar{\delta}^2\right) = \bar{\delta}$$

beweist $G : K_{\bar{\delta}}(0) \rightarrow K_{\bar{\delta}}(0)$. Die Kontraktivität folgt aus

$$\begin{aligned} \|G(R_1) - G(R_2)\|_1 &\leq K\|P(R_1) - P(R_2)\|_2 \\ &\leq KL\bar{\delta}\|R_1 - R_2\|_1 = \frac{1}{2}\|R_1 - R_2\|_1. \end{aligned}$$

Damit ist die Existenz einer in $K_{\bar{\delta}}(0)$ eindeutigen Lösung R bewiesen. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \|R\|_1 &= \|G(R)\|_1 \leq K(\|\varrho\|_2 + \|P(R)\|_2) \\ &\leq K(\|\varrho\|_2 + L\bar{\delta}\|R\|_1) = K\|\varrho\|_2 + \frac{1}{2}\|R\|_1, \end{aligned}$$

woraus die Abschätzung (7) folgt. ■

Zu den Voraussetzungen im Satz wäre zu sagen, daß (6) eine Aussage über die Glattheit von F ist, die gleichbedeutend mit Lipschitzstetigkeit

der Frechet-Ableitung ist. Die zentrale Voraussetzung ist (5). Sie bedeutet, daß das an der formalen Näherung linearisierte Problem für beliebige Inhomogenitäten eindeutig lösbar sein muß und die Lösung stetig von den Daten abhängen muß. Diese Eigenschaft wird als Stabilität bezeichnet. Analog zur Analyse von gewissen numerischen Verfahren kann auch hier die Merkmregel

$$\text{Konsistenz} + \text{Stabilität} = \text{Konvergenz}$$

verwendet werden.

Bei Anwendbarkeit des Satzes kann das entsprechende Problem als *sachgemäß gestellt* bezeichnet werden: Es gibt eine lokal (in $K_{\bar{\delta}}(u_{as})$) eindeutige Lösung, die stetig von Störungen (ϱ) abhängt.

Bei der Anwendung des Satzes kann das folgende Resultat sehr brauchbar sein.

Lemma 1 *Seien A und B lineare Abbildungen von B_1 nach B_2 . Weiters besitze A eine beschränkte Inverse mit*

$$\|A^{-1}f\|_1 \leq K\|f\|_2 \quad \forall f \in B_2,$$

und für $A^{-1}B$ gelte

$$\|A^{-1}Bu\|_1 \leq \delta\|u\|_1 \quad \forall u \in B_1, \quad \delta < 1.$$

Dann besitzt die Abbildung $A + B$ eine beschränkte Inverse mit

$$\|(A + B)^{-1}f\|_1 \leq \frac{K}{1 - \delta}\|f\|_2 \quad \forall f \in B_2.$$

Beweis. Die Gleichung $(A + B)u = f$ ist äquivalent zu

$$u = A^{-1}f - A^{-1}Bu.$$

Da die rechte Seite wegen der Voraussetzungen eine kontrahierende Abbildung ist, folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung und damit die Invertierbarkeit von $A + B$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Für die Abschätzung der Norm der Inversen verwenden wir

$$\|u\|_1 \leq K\|f\|_2 + \delta\|u\|_1 \quad \implies \quad \|(A + B)^{-1}f\|_1 = \|u\|_1 \leq \frac{K}{1 - \delta}\|f\|_2,$$

womit das Lemma bewiesen ist. ■

Wir wollen nun diese Theorie auf das Anfangswertproblem (1), (2) anwenden, wobei wir uns auf ein beschränktes Zeitintervall $[0, T]$ einschränken. Wir wählen $B_1 = C^2([0, T])$, $B_2 = C([0, T]) \times \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |\dot{x}(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |\ddot{x}(t)|, \\ \|(f, \alpha, \beta)\|_2 &= \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| + |\alpha| + |\beta|.\end{aligned}$$

Das Problem (1), (2) kann in der Form $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} \ddot{x} + x - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \\ x(0) - \bar{x} \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Als Näherungslösung (u_{as}) verwenden wir die oben berechnete formale Näherung $x_0(t) = \bar{x} \cos t$, die das Residuum

$$\varrho = \varepsilon \begin{pmatrix} -(1 - x_0^2)\dot{x}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert. Die Frechetableitung von F ist gegeben durch

$$DF(x)y = \begin{pmatrix} \ddot{y} + y - \varepsilon(1 - x^2)\dot{y} + 2\varepsilon x\dot{x}y \\ y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = Ay + By,$$

mit

$$Ay = \begin{pmatrix} \ddot{y} + y \\ y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}, \quad By = \varepsilon \begin{pmatrix} -(1 - x^2)\dot{y} + 2x\dot{x}y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Lemmas können für ε klein genug alle Voraussetzungen des Satzes gezeigt werden. Dabei zeigt sich, dass die Konstante K in (5) mit $T \rightarrow \infty$ gegen unendlich strebt. Das Problem (1), (2) besitzt daher auf dem Intervall $[0, T]$ für kleine ε eine eindeutige Lösung $x(t)$, für die $\|x - x_0\|_1 = O(\varepsilon)$ gilt. Auf dieselbe Art zeigt man

$$\left\| x - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k \right\|_1 = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Die Methode der mehrfachen Skalierungen

Das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x, \quad x(0) = \bar{x}, \quad \dot{x}(0) = 0$$

hat die Lösung

$$x(t) = \bar{x} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon} t).$$

Offensichtlich hat die formale Näherung $\bar{x} \cos t$ für t groß genug mit der Lösung nichts mehr zu tun. Auch der kleine Unterschied in der Frequenz bewirkt nach langer Zeit deutliche Unterschiede in der Lösung. Eine Verbesserung der reduzierten Lösung erreicht man durch asymptotische Entwicklung der Frequenz:

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)$$

Die Näherung

$$X_0(t) = \cos\left(t - \frac{\varepsilon t}{2}\right)$$

ist zwar auch nicht gleichmäßig auf $[0, \infty)$ gültig, aber ihr Gültigkeitsbereich hat sich wesentlich vergrößert. Während $x_0(t)$ die exakte Lösung approximiert, solange $t = o(\varepsilon^{-1})$ gilt, ist $X_0(t)$ für $t = o(\varepsilon^{-2})$ eine gültige Approximation. Durch Berücksichtigung von weiteren Termen in der Entwicklung der Frequenz kann der Gültigkeitsbereich weiter vergrößert werden. Im Gegensatz dazu führt die direkte Methode des vorigen Abschnittes zwar zu erhöhter Genauigkeit auf beschränkten Intervallen aber zu keiner Vergrößerung des Gültigkeitsintervalles.

Die Lösung des Problems

$$\ddot{x} + x = -2\varepsilon \dot{x}, \quad x(0) = \bar{x}, \quad \dot{x}(0) = 0$$

ist gegeben durch

$$x(t) = \bar{x} e^{-\varepsilon t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t).$$

Hier wird nicht nur die Frequenz, sondern auch die Amplitude der Schwingung durch die Störung verändert. Das Langzeitverhalten der exakten Lösung und das der Lösung des reduzierten Problems unterscheiden sich wesentlich voneinander. Während die Lösung des reduzierten Problems periodisch ist, konvergiert die Lösung des vollen Problems für $t \rightarrow \infty$ gegen Null. Näherungen, die auf immer längeren Intervallen gültig sind, können auch hier durch Entwicklung der Frequenz bestimmt werden. Das Auftreten der Kombination εt in den Näherungslösungen bei den beiden Beispielen könnte

auf die Vermutung führen, daß ein Grund für unsere Schwierigkeiten in einer ungünstigen Skalierung der Zeit liegt. Es zeigt sich allerdings, daß es auch nicht weiterhilft, statt t die umskalierte Zeitvariable $T_1 = \varepsilon t$ zu verwenden. Aus den obigen Beispielen ist ersichtlich, daß hier Vorgänge mit verschiedenen charakteristischen Zeiten gleichzeitig ablaufen.

Diese Erkenntnis ist die Grundlage für die *Methode der mehrfachen Skalierungen*. Sie besteht darin, für die Koeffizienten in der Entwicklung $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$ einen Ansatz der Form

$$x_k = x_k(T_0, T_1, T_2, \dots)$$

zu machen, wobei die unabhängigen Variablen

$$T_i = \varepsilon^i t$$

verwendet werden. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \frac{\partial x_k}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial x_k}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2), \\ \ddot{x}_k &= \frac{\partial^2 x_k}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x_k}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Setzen wir einen derartigen Ansatz in die van der Pol-Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_0 + \varepsilon x_1 = \varepsilon(1 - x_0^2) \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + O(\varepsilon^2).$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 &= -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + (1 - x_0^2) \frac{\partial x_0}{\partial T_0}. \end{aligned}$$

Zunächst scheint diese Methode das Problem wesentlich komplizierter zu machen, da sie auf Systeme von partiellen Differentialgleichungen führt. Man sieht jedoch leicht, daß die Koeffizienten in der Entwicklung rekursiv durch Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden können, die inhomogene Versionen der reduzierten Gleichung sind. Die Gleichung für x_0 hat die allgemeine Lösung

$$x_0 = a(T_1, T_2, \dots) \cos(T_0 + b(T_1, T_2, \dots))$$

mit beliebigen a, b , die von T_0 unabhängig sind. Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$a(0, 0, \dots) = \bar{x}, \quad b(0, 0, \dots) = 0.$$

Die rechte Seite in der Gleichung für x_1 ist damit

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial a}{\partial T_1} \sin \varphi + 2a \frac{\partial b}{\partial T_1} \cos \varphi - a \sin \varphi (1 - a^2 \cos^2 \varphi) \\ &= \left(2 \frac{\partial a}{\partial T_1} - a + \frac{a^3}{4} \right) \sin \varphi + 2a \frac{\partial b}{\partial T_1} \cos \varphi + \frac{a^3}{4} \sin 3\varphi, \end{aligned}$$

wobei wir $\varphi = T_0 + b$ gesetzt haben. Ähnlich wie bei der direkten Methode würden die Terme mit $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ Resonanz erzeugen. Nun können wir aber die Freiheit bei der Wahl von a und b dazu nützen, diese Terme auszuschalten. Damit ergeben sich für a und b die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial T_1} &= \frac{a}{8}(4 - a^2), \\ \frac{\partial b}{\partial T_1} &= 0. \end{aligned}$$

Suchen wir eine formale Näherung, die ein $O(\varepsilon^2)$ -Residuum erzeugt, dann können wir in a und b die Abhängigkeit von den Variablen T_2, T_3, \dots , und in x_1 die Abhängigkeit von T_1, T_2, \dots vernachlässigen. Die Gleichung für a hat die stabilen stationären Punkte $a = \pm 2$ und den instabilen stationären Punkt $a = 0$. Mit den Anfangsbedingungen für a und b erhalten wir

$$a = \frac{2\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x}^2 - 4)e^{-\varepsilon t}}}, \quad b = 0.$$

Die Approximation

$$x_0(t) = \frac{2\bar{x} \cos t}{\sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x}^2 - 4)e^{-\varepsilon t}}}$$

nähert sich für $t \rightarrow \infty$ einer periodischen Schwingung mit Amplitude 2 und Periode 2π , d.h. es tritt ein sogenannter *Grenzykel* auf. Die Existenz eines solchen Grenzykels kann auch für das volle Problem bewiesen werden.

Singulär gestörte Differentialgleichungen – Grenzschichten

Wir kehren zurück zur van der Pol-Gleichung (1) und betrachten nun die andere extreme Situation nämlich, dass der Parameter auf der rechten Seite sehr große Werte annimmt. Wir ersetzen ε durch $1/\varepsilon$ und betrachten die Differentialgleichung

$$\varepsilon \ddot{x} + \varepsilon x = (1 - x^2)\dot{x}, \quad (8)$$

für $0 < \varepsilon \ll 1$ mit Anfangsbedingungen der Form (2). Setzt man formal in der Differentialgleichung $\varepsilon = 0$, dann erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösungen im allgemeinen die beiden Anfangsbedingungen nicht erfüllen können.

Eine ähnliche Situation tritt bei dem Anfangswertproblem

$$\varepsilon \dot{x} = -x + t + \varepsilon, \quad x(0) = 1, \quad (9)$$

auf. Die *reduzierte Gleichung* $0 = -x_0 + t$ ist eine algebraische Gleichung, und ihre Lösung $x_0(t) = t$ kann keine allgemeine Anfangsbedingung erfüllen. Die Lösung

$$x_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon} + t$$

konvergiert punktweise gegen die unstetige Funktion, die den Anfangswert annimmt und für $t > 0$ durch $x_0(t)$ gegeben ist. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, aber man zeigt leicht, dass x_0 der Grenzwert der Familie $\{x_\varepsilon\}$ ist bezüglich der L^p -Normen

$$\|x\|_{L^p((0,T))} := \left(\int_0^T |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Es gilt nämlich

$$\|x_\varepsilon - x_0\|_{C((0,T))} := \sup_{t \in (0,T)} |x_\varepsilon(t) - x_0(t)| = 1,$$

während

$$\|x_\varepsilon - x_0\|_{L^p((0,T))} \leq \left(\frac{\varepsilon}{p} \right)^{1/p}$$

für jedes $p \in [1, \infty)$ gegen Null konvergiert.

Definition 1 Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ sei $x_\varepsilon \in C(\overline{D})$ eine reelle Funktion.

a) Die Familie $\{x_\varepsilon\}$ heißt regulär in D , wenn der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C(D)}$ existiert.

b) Sei $t_0 \in \overline{D}$. Die Familie $\{x_\varepsilon\}$ hat Grenzsichtverhalten an t_0 , wenn $\{x_\varepsilon\}$ nicht regulär in D ist, allerdings regulär in jedem D_1 mit $\overline{D_1} \subset D \setminus \{t_0\}$ ist.

Das folgende Resultat ist leicht zu zeigen:

Lemma 2 Hat $\{x_\varepsilon\}$ Grenzsichtverhalten an t_0 , dann gibt es eine von ε unabhängige Funktion $\bar{x} \in C(\overline{D} \setminus \{t_0\})$ mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_\varepsilon - \bar{x}\|_{C(D_1)} = 0 \quad \text{für } \overline{D_1} \subset \overline{D} \setminus \{t_0\}.$$

Die durch $x_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon} + t$, $t > 0$, definierte Funktionenfamilie hat offensichtlich Grenzsichtverhalten an $t_0 = 0$ mit $\bar{x}(t) = t$.

Die Funktion \bar{x} beschreibt das Verhalten von x_ε weg von Grenzsichten. Um die Funktion in der Grenzsicht (d.h. in der Nähe von t_0) genauer betrachten zu können, verwenden wir eine Art mathematische Lupe in Form einer Transformation der unabhängigen Variablen:

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon^\alpha}, \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (10)$$

Wir nennen τ eine lokale Variable in der Nähe von t_0 . Ersetzen wir in unserem Beispiel $x_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon} + t$ die unabhängige Variable t durch die lokale Variable $\tau = t/\varepsilon^\alpha$, so ergibt sich die transformierte Funktion $X_\varepsilon(\tau) = \exp(-\varepsilon^{\alpha-1}\tau) + \varepsilon^\alpha\tau$ und der Limes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \alpha < 1, \tau > 0, \\ e^{-\tau} & \text{für } \alpha = 1, \tau \geq 0, \\ 1 & \text{für } \alpha > 1, \tau \geq 0. \end{cases}$$

Die folgende Definition formalisiert die Aussage, dass wir für die unabhängige Variable für $0 < \alpha < 1$ zu wenig, für $\alpha > 1$ zu viel, und für $\alpha = 1$ gerade richtig gestreckt haben.

Definition 2 a) Sei $\tau = (t - t_0)/\varepsilon^\alpha$ eine lokale Variable. Wir definieren den lokalen Grenzwert bezüglich τ durch

$$\left(\lim_{\tau} x_\varepsilon\right)(\tau) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t_0 + \varepsilon^\alpha\tau).$$

Der Definitionsbereich von $\lim_{\tau} x_{\varepsilon}$ ist die Vereinigung aller kompakten Intervalle, in denen die obige Konvergenz gleichmäßig ist.

b) Seien τ_1 und τ_2 lokale Variable in der Nähe von t_0 (charakterisiert durch verschiedene Werte von α in (10)) und D_2 bzw. D_{12} die Definitionsbereiche der lokalen Grenzwerte bezüglich τ_2 von x_{ε} bzw. von $\lim_{\tau_1} x_{\varepsilon}$. Dann ist der lokale Grenzwert bezüglich τ_2 enthalten in dem lokalen Grenzwert bezüglich τ_1 , wenn $D_2 \subset D_{12}$ und

$$\lim_{\tau_2} \left(\lim_{\tau_1} x_{\varepsilon} \right) = \lim_{\tau_2} x_{\varepsilon}$$

in D_2 gilt.

c) Ein lokaler Grenzwert heißt signifikant, wenn er in keinem anderen lokalen Grenzwert enthalten ist. Die entsprechende lokale Variable heißt dann Grenzschnittvariable.

Durch b) ist eine Halbordnung definiert. Signifikante Grenzwerte entsprechen maximalen Elementen.

Offensichtlich ist für die Funktion $x_{\varepsilon}(t) = e^{-t/\varepsilon} + t$ durch $\tau = t/\varepsilon$ eine Grenzschnittvariable gegeben. Es können auch mehrere Grenzschnittvariable auftreten, wie das Beispiel

$$x_{\varepsilon}(t) = t \left(\frac{e^{-t/\varepsilon}}{t + \varepsilon^2} + 1 \right) \quad (11)$$

zeigt. Offensichtlich gilt $\bar{x}(t) = t$. Wegen $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{\varepsilon}(\varepsilon^2) = 1/2 \neq \bar{x}(0)$ hat $\{x_{\varepsilon}\}$ an der Stelle $t = 0$ Grenzschnittverhalten. Man zeigt leicht, dass es zwei Grenzschnittvariablen, nämlich $\tau_1 = t/\varepsilon$ und $\tau_2 = t/\varepsilon^2$ gibt mit

$$\begin{aligned} \left(\lim_{\tau_1} x_{\varepsilon} \right) (\tau_1) &= e^{-\tau_1}, & \tau_1 \in D_1 &= (0, \infty), \\ \left(\lim_{\tau_2} x_{\varepsilon} \right) (\tau_2) &= \frac{\tau_2}{\tau_2 + 1}, & \tau_2 \in D_2 &= [0, \infty). \end{aligned}$$

Zur Approximation von Funktionen, für die es genau eine Grenzschnittvariable τ gibt, ist folgende Vorgangsweise naheliegend: Die Funktion $x_{\varepsilon} - \bar{x}$ liefert nur in der Nähe von t_0 einen signifikanten Beitrag. Wir verwenden das *heuristische Prinzip*, daß $x_{\varepsilon} - \bar{x}$ durch seinen lokalen Grenzwert bezüglich τ gleichmäßig approximiert werden kann. Mit anderen Worten erwarten wir also, daß

$$\bar{x} + \lim_{\tau} (x_{\varepsilon} - \bar{x})$$

eine asymptotische Näherung für x_ε bezüglich der Supremum-Norm ist. Der zweite Summand $\lim_\tau(x_\varepsilon - \bar{x})$ wird *Grenzschichtkorrektur* genannt. Diese muss die *Matching-Bedingung* erfüllen, dass sie für $\tau \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, d.h. dass sie außerhalb der Grenzschicht keinen Beitrag liefert.

Diese Idee ist auch im Fall der Existenz von mehreren Grenzschichtvariablen anwendbar: Wir approximieren die Funktion (11) durch

$$\bar{x} + \lim_{\tau_1}(x_\varepsilon - \bar{x}) + \lim_{\tau_2} \left(x_\varepsilon - \bar{x} - \lim_{\tau_1}(x_\varepsilon - \bar{x}) \right).$$

Die Näherung besteht aus 3 Summanden, die von den unabhängigen Variablen t , τ_1 und τ_2 abhängen. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese Summanden t , $e^{-\tau_1}$ und $-\tau_2/(1 + \tau_2)$ sind. Für den Fehler gilt

$$x_\varepsilon - t - e^{-t/\varepsilon} + \frac{1}{1 + t/\varepsilon^2} = \frac{1 - e^{-t/\varepsilon}}{1 + t/\varepsilon^2} \leq \varepsilon \frac{1 - e^{-\tau_1}}{\tau_1}.$$

Der von τ_1 abhängende Faktor auf der rechten Seite ist für $\tau_1 \in [0, \infty)$ beschränkt, und daher ist das oben genannte heuristische Prinzip hier bestätigt: Die Summe aus \bar{x} und den beiden Grenzschichtkorrekturen ist eine gleichmäßig gültige Approximation für x_ε .

Nun wollen wir daran gehen, Probleme mit singular gestörten Differentialgleichungen zu lösen, indem wir nach Approximationen für die Lösung suchen, die Grenzschichtverhalten besitzen. Wir beginnen mit dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} + x &= 0, & \text{für } 0 < t < 1, \\ x(0) &= 1, & x(1) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Die allgemeine Lösung $\bar{x}(t) = Ae^{-t}$ der reduzierten Gleichung $\ddot{x} + \bar{x} = 0$ kann offensichtlich nicht beide Randbedingungen erfüllen. Wir setzen mit einer weiteren heuristischen Annahme fort: *Lösungen singular gestörter Differentialgleichungen besitzen dort Grenzschichten, wo Anfangs- oder Randbedingungen nicht erfüllt werden können.* Für unser Beispiel bedeutet das, dass Grenzschichten an $t = 0$ und/oder an $t = 1$ auftreten können und dass im Inneren des Intervalles die Lösung durch $\bar{x}(t) = Ae^{-t}$ mit einer geeigneten Konstante A approximiert werden kann.

Um eine Näherung für die Lösung in einer Grenzschicht bei $t = 0$ zu berechnen, führen wir die lokalen Variablen $\tau = t/\varepsilon^\alpha$ ein und transformieren die Differentialgleichung entsprechend:

$$-\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \varepsilon^{-\alpha} \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \tag{13}$$

Bevor wir den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführen können, müssen wir mit einer geeigneten Potenz von ε multiplizieren. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 0 && \text{für } 0 < \alpha < 1, \\ -\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} &= 0 && \text{für } \alpha = 1, \\ -\frac{d^2x}{d\tau^2} &= 0 && \text{für } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Wir nennen diese Gleichungen *lokale Degenerationen* der ursprünglichen Differentialgleichung. Analog zu den lokalen Grenzwerten definiert man auch hier eine Ordnungsrelation auf der Menge der lokalen Degenerationen. Maximale Elemente, d.h. lokale Degenerationen, die aus keiner anderen Degeneration hergeleitet werden können, heißen *signifikante Degenerationen*. Eine weitere heuristische Annahme ist das **Korrespondenzprinzip**: *Signifikante Grenzwerte von Lösungen singular gestörter Differentialgleichungen sind Lösungen signifikanter Degenerationen.*

Offensichtlich führt in unserem Beispiel die Wahl $\tau = t/\varepsilon$ auf die signifikante Degeneration $-\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = 0$. Eine brauchbare Faustregel für das Auffinden signifikanter Degenerationen ist: 'Signifikante Degenerationen enthalten möglichst viele, mindestens jedoch zwei Terme.'

In unserem Beispiel könnte man, ausgehend von der transformierten Gleichung (13), so vorgehen: Der dritte Term ist für jedes positive α klein im Vergleich zum zweiten; er kann daher in keiner lokalen Degeneration vorkommen. Es müssen also der erste und der zweite Term vorkommen. Dazu müssen die beiden ε -Potenzen übereinstimmen. Das führt auf die Gleichung $1 - 2\alpha = -\alpha$ mit der Lösung $\alpha = 1$.

Analog findet man eine signifikante Degeneration für eine mögliche Grenzschicht bei $t = 1$ mit der Grenzschichtvariablen $\eta = (1 - t)/\varepsilon$. Aus unseren heuristischen Prinzipien ergibt sich nun für eine Approximation der Lösung $x_\varepsilon(t)$ der Ansatz

$$x_\varepsilon(t) \approx \bar{x}(t) + \tilde{x}(\tau) + \hat{x}(\eta),$$

mit den beiden Grenzschichtkorrekturen \tilde{x} und \hat{x} , die die Matching-Bedingung $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{x}(\tau) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{x}(\eta) = 0$ erfüllen. Die Gleichungen für \bar{x} , \tilde{x} und \hat{x} ermittelt man, indem man den Ansatz in die ursprüngliche Differentialgleichung einsetzt, die entstehende Gleichung in Abhängigkeit der unabhängigen Variablen t , τ bzw. η schreibt und in jeder dieser Gleichungen ε gegen Null

gehen lässt. Das Resultat sind die Gleichungen

$$\begin{aligned}\bar{x}_t + \bar{x} &= 0, \\ -\tilde{x}_{\tau\tau} + \tilde{x}_\tau &= 0, \\ -\hat{x}_{\eta\eta} - \hat{x}_\eta &= 0.\end{aligned}$$

Die *Grenzschichtgleichungen* für \tilde{x} und \hat{x} unterscheiden sich durch ein Vorzeichen ganz wesentlich. Berücksichtigt man die Abklingbedingung, dann kommt für \tilde{x} nur die triviale Lösung $\tilde{x} = 0$ in Frage, während im Fall von \hat{x} die eindimensionale Lösungsschar $\hat{x}(\eta) = Be^{-\eta}$ verwendet werden kann. Unsere formale Vorgangsweise impliziert, dass $x_\varepsilon(t)$ eventuell eine Grenzschicht an $t = 1$, aber keine an $t = 0$ hat. Daraus folgt, dass \bar{x} die Randbedingung an $t = 0$, $\bar{x}(0) = 1$ erfüllen muss. Das gibt $\bar{x}(t) = e^{-t}$. Die Randbedingung an $t = 1$ liefert $\bar{x}(1) + \hat{x}(0) = 0$, woraus $B = -e^{-1}$ folgt. Damit haben wir die formale Näherung

$$x_{as}(t, \varepsilon) = e^{-t} - e^{-1+(t-1)/\varepsilon}$$

für die Lösung von (12) berechnet. Da die exakte Lösung des Problems explizit angegeben werden kann, ist die Gültigkeit der Näherung leicht zu überprüfen.

Relaxationsschwingungen der van der Pol-Gleichung

Wir kehren zurück zur van der Pol-Gleichung in der Form (8). Zunächst skalieren wir die Zeit durch $t \rightarrow t/\varepsilon$ um und schreiben die Gleichung als System erster Ordnung:

$$\varepsilon^2 \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \dot{y} = x.$$

Das reduzierte System

$$0 = \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{3} - \bar{y}, \quad \dot{\bar{y}} = \bar{x},$$

besteht aus einer algebraischen Gleichung, die eine S-förmige Kurve K in der x - y -Ebene beschreibt, und aus einer Differentialgleichung. Weg von den Extrempunkten $(1, 2/3)$ und $(-1, -2/3)$ kann die algebraische Gleichung nach $\bar{x} = \bar{x}(\bar{y})$ aufgelöst werden, und es ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung für \bar{y} , die einen Fluss auf K beschreibt. Für positive bzw. negative \bar{x} strebt dieser Fluss jeweils den Extrempunkten zu. Diese werden

jeweils in endlicher Zeit erreicht, und zunächst ist unklar, was dann passiert. Betrachten wir zum Beispiel eine Lösung, die auf dem rechten Ast von K liegt und für die $\bar{x}(t_0) = 1$, $\bar{y}(t_0) = 2/3$ gilt. Wir versuchen an diese Lösung eine Grenzschichtlösung 'anzuhängen'. Mit der Grenzschichtvariablen $\tau = t/\varepsilon^2$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\frac{dx}{d\tau} = x - \frac{x^3}{3} - y, \quad \frac{dy}{d\tau} = 0.$$

Die Variable y ist also in der Grenzschicht konstant (sie ist eine sogenannte *langsame Variable*). Als Matching-Bedingung muss der konstante Wert $2/3$ sein. Damit lässt sich die Grenzschichtgleichung für x schreiben als

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{1}{3}(x-1)^2(x+2).$$

Offensichtlich gibt es Lösungen mit $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x(\tau) = 1$ und $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = -2$. Diese stellen eine in der x - y -Ebene waagrechte Verbindung zwischen dem Extrempunkt $(1, 2/3)$ und dem Punkt $(-2, 2/3)$ auf dem linken Ast von K dar. Zurückgekehrt auf K , kann man nun wieder Lösungen der reduzierten Gleichungen folgen, bis man den linken Extrempunkt $(-1, -2/3)$ erreicht. Hier hängt man analog zu oben wieder eine Grenzschichtlösung an, die waagrecht nach rechts bis zum Punkt $(2, -2/3)$ auf K führt. Nun wandert man wieder mit Hilfe der reduzierten Gleichungen nach oben, und der Kreis schließt sich. Wir haben also aus zwei Teilstücken von K und aus den beiden waagrechten Verbindungen eine Näherung für einen periodischen Orbit konstruiert. Betrachtet man den Graphen der entsprechenden periodischen Funktion $x(t)$, so ergibt sich eine Abfolge langsam variierender und fast vertikaler Abschnitte (eine *Relaxationsschwingung*). Man kann beweisen, dass in der Nähe dieser formalen Näherung ein Grenzykel der vollen van der Pol-Gleichung existiert.