Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 21,
Übungsblatt für die Woche ab 19.4.21

Ein Spezialfall des *Schauderschen Fixpunktsatzes:*

Satz: *Sei B ein Banachraum und $K \subset B$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Die Abbildung $F : K \to K$ sei stetig, und $F(K)$ sei folgenkompakt. Dann besitzt F einen Fixpunkt in K, d.h. eine Lösung der Gleichung $x = F(x)$.*

1. Man verwende den Schauderschen Fixpunktsatz, um das Peano-Theorem zu beweisen.

2. Man betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = -x + f(t,x)\,, \qquad x(0) = x_0\,,$$

mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in C_B([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes zeige man die Existenz einer Lösung $x \in C_B([0,\infty))$. *Hinweis:* Eine geeignete Fixpunktformulierung erhält man, indem man $f(t,x)$ wie eine gegebene Inhomogenität behandelt und das entsprechende Problem explizit löst. Dann arbeitet man zunächst auf beschränkten Zeitintervallen $[0,T]$, wobei man zeigt, dass T beliebig groß gewählt werden kann.

3. Für das Problem

$$\dot{x} = t(\varepsilon t - x^2)\,, \qquad x(0) = 1\,,$$

bestimme man x_0 und x_1 in einer Entwicklung der Form $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$. Was kann bezüglich der Gültigkeit der formalen Entwicklung ausgesagt werden?

4. Man nennt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *einseitig lipschitzstetig*, wenn es eine *(einseitige Lipschitz-)*Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$(x-y)\cdot(f(x)-f(y)) \le L|x-y|^2\,, \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Man gebe ein Beispiel mit negativer einseitiger Lipschitzkonstante an. Was kann mit Hilfe der einseitigen Lipschitzstetigkeit über die Abhängigkeit der Lösung des Problems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, vom Anfangswert ausgesagt werden? *Hinweis:* Für 2 Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ betrachte man die Zeitableitung von $|x-y|^2$.