Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 21, Übungsblatt für die Woche ab 12.4.21

1. Man zeige, dass die Integralgleichung

$$x(t) = t + \varepsilon \int_0^\pi \sin x(s) ds$$

für ε klein genug eine eindeutige Lösung $x \in C([0,\pi])$ besitzt.

2. Man zeige, dass die Integralgleichung

$$x(t) = \sin t + \varepsilon \int_0^\infty e^{-s} x(t+s) ds$$

für ε klein genug eine eindeutige Lösung $x \in C_B([0,\infty))$ (Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen) besitzt.

3. Man löse das Problem aus dem vorigen Beispiel explizit. Hinweis: Differenzieren und dann partielle Integration.

4. Man bestimme den formalen Limes für $\varepsilon \to 0+$ der Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = -\varepsilon x + 1\,, \quad x(0) = 0\,,$$

und zeige, dass er eine gute Approximation für die Lösung in $C([0,T])$, $0 < T < \infty$, ist, aber nicht in $C_B([0,\infty))$.