Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 21, Prüfung, 28.6.21

1. Nach Bestimmung einer Lösung der Form $x(t) = t^\alpha$ der Differentialgleichung $t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$ und anschließender Reduktion der Ordnung ergibt sich die Differentialgleichung
   a) $ty'' - y' = 0$
   b) $ty' + y = 0$
   c) $y' - 2ty = 0$
   d) $t^2y'' + y = 0$
   Lösung: Der Ansatz $x(t) = t^\alpha$ führt auf die Gleichung $\alpha(\alpha - 1) - 3\alpha + 4 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha - 2)^2 = 0$ mit der einzigen Lösung $\alpha = 2$. Der weitere Ansatz $x(t) = t^2u(t)$ führt nach ein bisschen Rechnung auf $t^3(tu'' + u') = 0$, d.h. mit $y = u'$ auf Antwort b).

2. Für die Lösung des Anfangswertproblems $x' = x^2$, $x(0) = -1$, gilt
   a) $x^{(4)}(0) = 4!$
   b) $x(1) = 1/2$
   c) $x^{(6)}(0) = -6!$
   d) $x''(0) = -3$
   Lösung: Differenzieren der Differentialgleichung ergibt $x'' = 2xx' = 2x^3, \dots, x^{(n)} = n!\, x^{n+1}$, und daher $x^{(n)}(0) = n!(-1)^{n+1}$. Also ist c) die richtige Antwort.

3. Welche Aussage über $y(t) = 1 + e^{2t}$, $t \geq 0$, stimmt?
   a) Die Funktion y ist eine Unterlösung von $x' = 2x$, $x(0) = 1$.
   b) Die Funktion y ist eine Oberlösung von $x' = 2x - 3e^{-t}$, $x(0) = 2$.
   c) Die Funktion y ist eine Unterlösung von $x' = x$, $x(0) = 2$.
   d) Die Funktion y ist eine Oberlösung von $x' = \sin x^2$, $x(0) = 1$.
   Lösung: Die Angabe ist ein bisschen schlampig, weil im Logbuch die Bedingung $y(0) \leq (\geq) x(0)$ für eine Unter-(Ober-)lösung nicht explizit verlangt ist. Diese (für die Anwendung von Korollar 1 notwendige) Bedingung ist in a) verletzt. In b) wechselt $y' - 2y + 3e^{-t}$ das Vorzeichen, und in c) hat $y' - y \geq 0$ das falsche Vorzeichen. Antwort d) ist wegen $y(0) > x(0)$, $y' - \sin y^2 \geq 2e^{2t} - 1 \geq 1 > 0$ die richtige.

4. Welche Aussage über das Anfangswertproblem $x' = x^3$, $x(0) = 2$, stimmt?
   a) Das maximale Existenzintervall ist $(-\infty, 1/2)$.

b) Die Lösung existiert für alle $t > 0$ und $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
c) Das maximale Existenzintervall ist $(-1/2, 1/2)$.
d) Die Lösung existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$.
Lösung: Dividiert man die Differentialgleichung durch x^3 und integriert dann, erhält man $-\frac{1}{2x^2} = t - \frac{1}{8}$, wobei der Wert $-1/8$ der Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung folgt. Daraus berechnet man $x(t) = 2(1-8t)^{-1/2}$. Das maximale Existenzintervall ist offensichtlich $(-\infty, 1/8)$. Alle Antworten sind falsch. Das Beispiel wurde für alle KandidatInnen als richtig gewertet (auch weil viele die der richtigen Antwort am 'nächsten' kommende Antwort a) gegeben haben).

5. Welche Aussage gilt für jedes Anfangswertproblem $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig?
a) Für $T > 0$ klein genug existiert eine eindeutige Lösung in $[-T, T]$.
b) Für jedes $T > 0$ existiert eine Lösung in $[-T, T]$.
c) Die Lösung ist nicht eindeutig.
d) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und hölderstetig mit Exponent $1/2$. Dann existiert eine Lösung in $\mathbb{R}$.
Lösung: Antwort a) ist falsch, weil Stetigkeit von f nicht für Eindeutigkeit genügt. Antwort b) ist falsch, weil das Peano-Theorem nur Lösbarkeit für T klein genug garantiert. Antwort c) ist falsch, weil es sehr wohl Probleme der angegebenen Form mit eindeutiger Lösung gibt. Antwort d) ist richtig, weil aus der Hölderstetigkeit $|f(x) - f(0)| \le c\sqrt{|x|}$, und damit $|f(x)| \le |f(0)| + c\sqrt{|x|} \le |f(0)| + c(1+|x|)$ folgt. Daher kann man Satz 5 aus dem Logbuch anwenden.

6. Der Wert der Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} x\,, \qquad x(0) = \binom{2}{1}\,,$$

an der Stelle $t = 1$ ist
a) $(4, -16)$
b) $(-5, 22)$
c) $(11, 11)$
d) $(-6, 21)$
Lösung: Man sieht leicht $3x_1' + x_2' = 0$. Integration und Anfangsbedingungen ergeben $x_2 = 7 - 3x_1$, und daher $x_1' = -3x_1 - x_2 = -7$. Daraus folgt die Lösung $x_1(t) = 2 - 7t$, $x_2(t) = 1 + 21t$. Auswerten an $t = 1$ ergibt die richtige Antwort b).

7. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Welche Forderungen sind hinreichend dafür, dass der Operator $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ einen Eigenwert μ mit $|\mu| = \|K\|$ besitzt?
   a) K ist ein symmetrischer Differentialoperator.
   b) K ist symmetrisch und beschränkt.
   c) K ist symmetrisch und bildet beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen ab.
   d) Es gilt $\|K\| = \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle Ku, u\rangle|$.
   Lösung: Die Konstruktion der Eigenwerte im Beweis des Entwicklungssatzes (Satz 12 im Logbuch) verwendet die Kompaktheit des Operators, die nur in der richtigen Antwort c) enthalten ist.

8. Für die Lösung des Anfangs-Randwertproblems $\partial_t u = \partial_x^2 u$, $u(x,0) = x(1-x)$, $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t)$, gilt
   a) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = x(1-x)$
   b) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$
   c) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1/3$
   d) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1/6$
   Lösung: Eine stationäre Lösung $u_\infty(x)$ muss $u_\infty'' = 0$, $u_\infty'(0) = u_\infty'(1) = 0$ erfüllen und daher konstant sein. Daher ist Antwort a) falsch. Weiters gilt

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 \partial_x^2 u(x,t)dx = \partial_x u(1,t) - \partial_x u(0,t) = 0\,.$$

   Es muss daher

$$u_\infty = \int_0^1 u_\infty dx = \int_0^1 u(x,0)dx = \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}$$

   gelten, und Antwort d) ist richtig.