Präsentation Baumwachstum

1.) Wie wachsen Bäume? Woher nehmen sie Energie und Nährstoffe? (Frage ans Plenum)
⇨ Motivation: Grenzen des Baumwachstums (Waldwachstums)
2.) Wachstumsmodelle (allg. Herleitung)
3.) Lognormalverteilung

Wurzeln absorbieren Wasser und gelöste Nährstoffe aus dem Boden.
Wasser und Mineralstoffe werden im Xylem (=Holz) von den Wurzeln über Stamm und Äste in die Blätter transportiert.
Die Blätter nehmen CO_2 für die Photosynthese auf und geben O_2 ab.
In den Blättern wird Zucker durch Photosynthese (CO_2+Licht+H_2O) gebildet.
Zucker wird im Phloem (Bast) Richtung Wurzeln transportiert bzw. im Baum gespeichert.
In den Wurzeln wird Zucker mittels O_2 abgebaut und CO_2 an den Boden abgegeben (Zellatmung – ATP-Gewinn).

Alles ganz einfach oder doch nicht? Ein physikalisches Experiment führt zu einer essentiellen Frage…

Experiment:
Man nehme einen Krug Wasser und tauche einen 15m langen Strohhalm hinein. Nun beginnt man an dem Strohhalm zu saugen. Das Wasser kann bis zu einer Höhe von 10m aufsteigen, weiter geht es nicht. Über 10m Höhe beginnt das Wasser zu kochen. (Darüber Vakuum)

Frage: Wie gelangt also das Wasser in jenen Bäumen von den Wurzeln in die Blätter, die weit über 10m hoch werden?

Antwort: Transpiration – negativer Druck (Saugspannung) von 15 MPa durch Interaktion der Wassermoleküle in den Blättern
Grenze: Zwischen 120 und 130 Metern Baumhöhe

Bis jetzt haben wir das Problem auf einen Baum beschränkt betrachtet. Aber man kann nicht nur das Wachstum eines einzelnen Baumes betrachten, sondern auch Wachstumsprozesse eines ganzen Waldes bzw. Baumbestandes betrachten.

Wie wir gesehen haben ist das Wachstum eines einzelnen Baumes ist begrenzt. Wenn wir nun das Wachstum eines ganzen Waldes bzw. Baumbestandes betrachten, so müssen wir uns wieder grundsätzlich überlegen, wie unser Wachstum aussehen wird. Es gibt im Grunde genommen zwei Möglichkeiten.

1.) Der Wald bzw. Baumbestand breitet sich ungehindert aus, es ist also unbegrenztes Wachstum möglich. Dieses Modell ist natürlich unrealistisch.
2.) Der Wald bzw. Baumbestand wird in seinem Wachstum durch bestimmte Faktoren limitiert und das Wachstum stößt an irgendeinem Punkt an eine

Grenze. Für ein solches Wachstum versucht man geeignete Modelle zu finden.

Nun zu den mathematischen Ansätzen für ein geeignetes Wachstumsmodell:

Wachstumsmodelle werden durch Differentialgleichungen der Form M'(t)=x*M(t) beschrieben, wobei x für einen geeigneten Term steht.

Woher kommt dieser Ansatz? Betrachten wir als Beispiel das Wachstum von Bakterien: Bakterien sind Einzeller und vermehren sich durch Zellteilung. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur nimmt innerhalb einer Stunde umso stärker zu, je mehr Bakterien zu Beginn dieses Zeitraums vorhanden sind. Nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt t ein Bestand f(t)>0 vorhanden ist, der sich mit der Zeit t ändert. Der im Zeitintervall [t; t+h] anfallende Zuwachs f(t+h)-f(t) ist sowohl von h als auch vom Anfangsbestand f(t) abhängig. Mit kleinen Werten von h ist er also ungefähr proportional zu f(t)*h. Also f(t+h) - f(t)≈k*f(t)*h bzw.: $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$≈k*f(t). Dieser Ausdruck wird umso genauer, je kleiner h ist:
(*) $f'(t) = k * f(t)$
(*) Differentialgleichung des natürlichen Wachstums. Ist dabei der Proportionalitätsfaktor k>0, so erhält man einen natürlichen Wachstumsvorgang, für k<0 einen natürlichen Zerfallsprozess.
Zudem gilt $\frac{f'(t)}{f(t)}$=k und somit $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$=kt+c. [Sei A:= $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$ mit y=f(t) und $\frac{dy}{dt}$=f'(t), dann gilt: A=$\int \frac{dy}{dt}\frac{1}{y} dt$=$\int \frac{1}{y} dy$=ln(y)+c=ln(f(t))+c.] Wir erhalten ln(f(t))=kt+c => f(t)=e^{kt+c}. Mit e^c=a folgt schließlich f(t)=ae^{kt}, die uns bekannte Wachstumsfunktion zur Basis e.

Um nun zu verstehen, welche x für M'(t)=x*M(t) passend sind betrachten wir die einfache Wachstumsfunktion f(t)=a*q^t (q=e^k), wobei a für den Anfangswert, q für die Wachstumsrate und t für die verstrichene Zeit steht. Es ist leicht zu sehen, dass q>1 sein muss, damit f(t) „wächst". Für q>1 erhalten wir exponentielles Wachstum, für q<1 eine strikte Abnahme des Wertes von f(t) gegen Null. Beides eignet sich nicht für ein sinnvolles Wachstumsmodell. Wir müssen also q bzw. x so modifizieren, dass wir ein realistisches Modell erhalten (d.h. x muss für großes t gegen 0 gehen→ Wachstumsgrenze).
[M(t+1)=M(t)+x*M(t), t=0 zu Beginn, t geht gegen ∞]

Ansätze bzw. Modelle:

Logistisches Wachstum (nach Verhulst):

Man setzt hierbei x=a-b*M(t), wobei a und b Konstanten sind. Damit wird der Faktor x mit größerem M(t) kleiner. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet: M(t)=$\frac{M_0 a e^{at}}{M_0 b e^{at} - M_0 b + a}$ [M(0)=M_0].
Für diese Lösung zeigen wir nun exemplarisch das Lösungsverfahren:
Sei M'(t)=$\frac{dM(t)}{dt}$=(a-bM(t))M(t)=b($\frac{a}{b} - M(t)$)M(t)=ky(G-y) mit k=b, G=$\frac{a}{b}$, y=M(t), wobei G die obere Wachstumsschranke darstellt. Durch Umformen ergibt sich:

$k*dt=\frac{1}{y(G-y)}dy=\frac{1}{G}(\frac{1}{y}+\frac{1}{G-y})dy$. Multiplikation mit G und Integration (wobei $\int\frac{1}{G-y}\,dy=\ln(y-G)$) ergeben: $kGt+c=\ln y-\ln(\frac{y}{G-y})$[Man beachte hierbei, dass 0<y<G gilt, da wir 0<M(t)<G annehmen]. Durch Anwenden der Exponentialfunktion ergibt sich $e^{kGt+c}=\frac{y}{G-y}$ und schließlich durch Kehrwertbildung $e^{-kGt-c}=\frac{G-y}{y}=\frac{G}{y}-1$. Mit Addition von 1 und abermaliger Kehrwertbildung folgt $\frac{y}{G}=\frac{1}{1+e^{-kGt-c}}$ und damit $y=M(t)=G\frac{1}{1+e^{-kGt-c}}=G\frac{1}{1+e^{-kGt}\,e^{-c}}$.
Da $e^{-c}=e^{-kG0-c}=\frac{G}{M(0)}-1$ (siehe oben) folgt schließlich $M(t)=G\frac{1}{1+e^{-kGt}\,(\frac{G}{M(0)}-1)}$.
Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich dann die gesuchte Lösung.

Das Modell nach Gompertz:

Hier handelt es sich bereits um einen der verfeinerten Ansätze speziell passend für das Wachstum von Bäumen in einem Forstbetrieb.
M(t) sei also ab nun der Mittelwert der Biomassen (zum Zeitpunkt t) einer Grundmenge von Bäumen, die über einen längeren Zeitraum heranwachsen (Masse des "mittleren Baumes"). Die neue Idee: In der Forstwirtschaft wird dafür gesorgt (z.B. durch Beseitigung unerwünschter biologischer Konkurrenz), dass der einzelne Baum genug Lebensraum (Licht, Nährstoffe, etc.) bekommt, daher wirkt sich das Größerwerden des Bestandes weniger stark wachstumsbremsend aus als bei Verhulst modelliert. Man ersetzt folglich den linearen Term x=a-bM durch a-b*ln(M(t)). Für M(t) verwendet man dann in der Regel entweder Längenparameter (mittlere Baumhöhe) oder etwa die mittlere Querschnittsfläche Q des Stammes in Brusthöhe.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

Bis jetzt haben wir ausschließlich das Wachstum des "mittleren Baumes" im Laufe der Zeit modelliert. Eine realitätsnähere Darstellung muss jedoch berücksichtigen, dass es eben größere/stärkere und kleinere/schwächere Bäume gibt. Die Mathematik beschreibt einen solchen Sachverhalt üblicherweise durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.
Die bekannteste und meistverwendete ist dabei wohl die Normalverteilung mit der Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion
$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$.
Die Normalverteilung ist symmetrisch, μ(Erwartungswert/Mittelwert) und σ (Standardabweichung) sind zwei freie Parameter und $x\epsilon]0,\infty[$.

Gerade in den Waldwissenschaften hat man es aber mit (empirischen) Verteilungen zu tun, die nicht symmetrisch sind, sondern "links-schief":
Beispiel: In einem Buchenbestand wird an einer Stichprobe von n=88 Bäumen der Durchmesser in Brusthöhe gemessen. Die Werte werden in Klassen zu je 4 cm eingeteilt, wobei sich die folgende Tabelle ergibt:

Klasse (cm)	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32
Anzahl	14	34	19	15	5	1

Als eine mögliche Verteilung zur Modellierung kann man die sog. Log-Normalverteilung verwenden. Ihre Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion lautet

f(x)=$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}$exp(- $\frac{1}{2}(\frac{lnx - \mu}{\sigma})^2$) mit x∈]0,∞[und σ und μ als freien Parametern.
Allerdings kann man hier nicht einfach μ=Erwartungswert und σ=Standardabweichung wie für die Standardnormalverteilung setzten.
Um geeignete Schätzwerte für μ und σ zu erhalten geht man wie folgt vor:
Für den Erwartungswert wählt man die Formel E=$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ (entspricht dem Mittelwert der Stichprobe), wobei $\{x_1,\ldots,x_n\}$ die Menge der Elemente der Stichprobe ist und für die Varianz wählt man V=$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2$ (der Faktor $\frac{1}{n-1}$ garantiert auch für ein kleines n ein realistisches V). Setzt man nun σ=$\sqrt{ln(\frac{V}{E^2} + 1)}$ und μ=ln($\frac{E^2}{\sqrt{V+E^2}}$), so erhält man eine Log-Normalverteilung, die mit der Verteilung der Größen der gegebenen Stichprobe erstaunlich gut übereinstimmt.