Analysis, SS 12, 7. Übungsblatt

1. **Die Metrik des französischen Eisenbahnsystems:** In $\mathbb{R}^2$ sei ein Punkt P ausgezeichnet. Der Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten $x, y \in \mathbb{R}^2$ ist so definiert: Liegen die beiden Punkte auf einer Geraden durch P, dann ist ihr Abstand gegeben durch den euklidischen Abstand $\|x - y\|_2$. Sonst ist ihr Abstand gegeben durch $\|x - P\|_2 + \|y - P\|_2$. Man zeige, dass dadurch eine Metrik definiert wird. Wie sehen Epsilon-Umgebungen aus?

2. Man zeige, dass für $x = (x_1, x_2, x_3)$ durch
$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3|$$
eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird. Man beschreibe die Form von Epsilon-Umgebungen.

3. Man untersuche das Konvergenzverhalten der Funktionenfolge $f_n(x) = e^{-nx}$ in $C([0,1])$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, und bezüglich punktweiser Konvergenz.

4. Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $F : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$F(f) = \int_a^b f(x)dx\,,$$
eine stetige Abbildung ist, wenn man auf $C([a,b])$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ verwendet.

5. Analog für die durch
$$G(f)(x) = \int_a^x f(y)dy$$
definierte Abbildung $G : C([a,b]) \to C([a,b])$.

6. Durch $H(f)(x) = f'(x)$ wird eine Abbildung $H : C^1([0,2\pi]) \to C([0,2\pi])$ definiert. Anhand der Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ zeige man, dass H nicht stetig an $f_0(x) = 0$ ist, wenn man auf beiden Funktionenräumen ($C^1([0,2\pi])$ als Teilraum von $C([0,2\pi])$) die Normen $\|\cdot\|_\infty$ oder $\|\cdot\|_2$ verwendet.