Angewandte Mathematik für LAK, WS 15/16, 8. Übungsblatt, Lösung der Beispiele 2 und 3

1. Für gegebenes $u(t)$ kann das Anfangswertproblem

$$N'(t) = rN(t) - u(t)\,, \qquad N(0) = N_0\,,$$

explizit gelöst werden. Mit Variation der Konstanten (siehe Beispiel 3 des 2. Übungsblattes) berechnet man die Partikulärlösung $-\int_0^t e^{r(t-s)}u(s)ds$ und addiert diese zur allgemeinen Lösung ce^{rt} der homogenen Gleichung. Dann wird die Konstante c so gewählt, dass die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ erfüllt ist. Das ergibt

$$N(t) = N_0 e^{rt} - \int_0^t e^{r(t-s)}u(s)ds\,.$$

Setzt man das in J ein, hängt dieses nur mehr von u ab:

$$J[u] = \left(N_0 e^{rT} - \int_0^T e^{r(T-t)}u(t)dt\right)^2 + \alpha \int_0^T u(t)^2 dt\,.$$

Wird das Minimum von J an $u(t)$ angenommen, dann nimmt für ein beliebiges $v(t)$ die Funktion $j(\varepsilon) := J[u + \varepsilon v]$ ihr Minimum an $\varepsilon = 0$ an, und daher gilt $j'(0) = 0$. Offensichtlich ist $j(\varepsilon)$ ein quadratisches Polynom:

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) &= \left(N(T) - \varepsilon \int_0^T e^{r(T-t)}v(t)dt\right)^2 + \alpha \int_0^T (u(t) + \varepsilon v(t))^2 dt \\ &= J[u] + 2\varepsilon \left(-N(T)\int_0^T e^{r(T-t)}v(t)dt + \alpha \int_0^T u(t)v(t)dt\right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\left(\int_0^T e^{r(T-t)}v(t)dt\right)^2 + \alpha \int_0^T v(t)^2 dt\right) \end{aligned}$$

Der Faktor bei ε in der zweiten Zeile ist $j'(0)$, und es folgt daher

$$\int_0^T \left(-N(T)e^{r(T-t)} + \alpha u(t)\right) v(t)dt = 0 \qquad (1)$$

für beliebige $v(t)$, woraus $u(t) = \frac{N(T)}{\alpha} e^{r(T-t)}$ folgt. Für die Schädlingspopulation ergibt sich damit

$$N(t) = N_0 e^{rt} - \frac{N(T)}{\alpha} e^{r(T+t)} \int_0^t e^{-2rs} ds = N_0 e^{rt} - \frac{N(T)}{2r\alpha} e^{rT} \left(e^{rt} - e^{-rt} \right) .$$

Auswerten an $t = T$ liefert eine Gleichung für $N(T)$ mit der Lösung

$$N(T) = \frac{2r\alpha N_0 e^{rT}}{2r\alpha + e^{2rT} - 1} .$$

Damit ist die optimale Schädlingsvernichtungsrate gegeben durch

$$u(t) = \frac{2rN_0 e^{2rT-rt}}{2r\alpha + e^{2rT} - 1} ,$$

womit Beispiel 2 gelöst ist.

Für Beispiel 3 halten wir fest, dass für $\alpha \to 0$ das oben berechnete $N(T)$ gegen Null konvergiert. Das ist nicht überraschend. Wenn die Schädlingsbekämpfung nichts kostet, werden alle Schädlinge vernichtet. Die Schädlingsvernichtungsrate hat den Grenzwert

$$u_0(t) = \frac{2rN_0 e^{2rT-rt}}{e^{2rT} - 1} .$$

Betrachtet man von Anfang an das Problem mit $\alpha = 0$, dann ergibt die obige Vorgangsweise (siehe (1)) die Forderung $N(T) = 0$, aber keine weiteren Bedingungen an $u(t)$. Die vollständige Ausrottung der Schädlinge nach der Zeit T kann aber auch mit anderen Raten erzeugt werden, wie z.B. mit der konstanten Rate

$$u_1(t) = \frac{rN_0 e^{rT}}{e^{rT} - 1} .$$

Wodurch ist $u_0(t)$ unter den Raten, die die Schädlinge nach der Zeit T ausrotten, ausgezeichnet? Die Antwort ist naheliegend. Es ist unter diesen Raten die billigste im Sinne der Kosten $\int_0^T u(t)^2 dt$. Ein Beweis dieser Behauptung würde aber hier zu weit führen.