Lösung zum vierten Beispiel des zehnten Übungsblattes

Gegeben ist die Integralgleichung

$$x(t) = t + \varepsilon \int_0^1 \sin\left(t + x(s)\right) \mathrm{d}s\,. \tag{1}$$

Ich werde Ihnen im Folgenden zwei Lösungen präsentieren: eine kurze, welche die spezielle Struktur der Integralgleichung nutzt, und eine systematische, die sich an die Lösung des dritten Beispiels anlehnt.

Lösung durch iteriertes Einsetzen

Wenn wir annehmen, dass sich die Lösung mit kleinen Änderungen in ε nur wenig ändert (also stetig bzgl. ε ist), so folgt aus (1) sofort

$$x(t) = t + O(\varepsilon), \tag{2}$$

d. h., der Kandidat für den Limes $\varepsilon \to 0$ ist $x(t) = t$. Den Korrekturterm erhalten wir einfach durch Einsetzen von (2) (also des Kandidaten plus Fehlerterm) in die Integralgleichung:

$$x(t) = t + \varepsilon \int_0^1 \sin\left(t + s + O(\varepsilon)\right) \mathrm{d}s$$

Da die Sinusfunktion Lipschitz-stetig ist, erzeugen Änderungen von $O(\varepsilon)$ im Argument Änderungen von $O(\varepsilon)$ im Funktionswert, d. h.,

$$\begin{aligned} x(t) &= t + \varepsilon\Big(O(\varepsilon) + \int_0^1 \sin\left(t + s\right) \mathrm{d}s\Big) \\ &= t + \varepsilon \int_t^{1+t} \sin\tilde{s}\, \mathrm{d}\tilde{s} + O\Big(\varepsilon^2\Big) \\ &= t + \varepsilon(\cos t - \cos\left(1 + t\right)) + O\Big(\varepsilon^2\Big). \end{aligned}$$

Lösung mit linearem Ansatz (plus Fehlerterm)

Wir probieren den Ansatz

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)\varepsilon + O\Big(\varepsilon^2\Big). \tag{3}$$

Einsetzen von (3) in (1) und Anwendung des Additionstheorems ergibt

$$\begin{aligned} x_0(t) + x_1(t)\varepsilon + O\Big(\varepsilon^2\Big) &= t + \varepsilon \int_0^1 \sin\Big(t + x_0(s) + x_1(s)\varepsilon + O\Big(\varepsilon^2\Big)\Big) \mathrm{d}s \\ &= t + \varepsilon \int_0^1 \sin\left(t + x_0(s) + x_1(s)\varepsilon\right) \cos\Big(O\Big(\varepsilon^2\Big)\Big) \mathrm{d}s \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 \cos\left(t + x_0(s) + x_1(s)\varepsilon\right) \sin\Big(O\Big(\varepsilon^2\Big)\Big) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Aufgrund der Taylorentwicklung von Sinus ($\sin x = x - x^3/6 + \ldots$) und Kosinus ($\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \ldots$) wissen wir

$$\cos\Big(O\Big(\varepsilon^2\Big)\Big) = 1 + O\Big(\varepsilon^4\Big) \qquad \text{und} \qquad \sin\Big(O\Big(\varepsilon^2\Big)\Big) = O\Big(\varepsilon^2\Big)$$

und können vereinfachen, indem wir Terme mindestens zweiter Ordnung bzgl. ε in $O(\varepsilon^2)$ zusammenfassen:

$$\begin{aligned} x_0(t) + x_1(t)\varepsilon + O\Big(\varepsilon^2\Big) &= t + \varepsilon \int_0^1 \sin\left(t + x_0(s) + x_1(s)\varepsilon\right) \mathrm{d}s \\ &= t + \varepsilon \int_0^1 \sin\left(t + x_0(s)\right) \cos\left(x_1(s)\varepsilon\right) \mathrm{d}s \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 \cos\left(t + x_0(s)\right) \sin\left(x_1(s)\varepsilon\right) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Auch hier können wir die Abschätzungen

$$\cos\left(x_1(s)\varepsilon\right) = 1 + O\Big(\varepsilon^2\Big) \qquad \text{und} \qquad \sin\left(x_1(s)\varepsilon\right) = O(\varepsilon)$$

vornehmen und Terme höherer Ordnung (man beachte auch das ε vor dem Integral, also $\varepsilon O(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$) ignorieren:

$$x_0(t) + x_1(t)\varepsilon + O\Big(\varepsilon^2\Big) = t + \varepsilon \int_0^1 \sin\left(t + x_0(s)\right) \mathrm{d}s\,.$$

Jetzt können wir wieder den Koeffizientenvergleich bzgl. Potenzen von ε vornehmen:

$$\begin{aligned} &x_0(t) = t, \\ &x_1(t) = \int_0^1 \sin\left(t + x_0(s)\right) \mathrm{d}s = \int_0^1 \sin\left(t + s\right) \mathrm{d}s = \int_t^{t+1} \sin \tilde{s}\, \mathrm{d}\tilde{s} = \cos t - \cos\left(1 + t\right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Substitution $\tilde{s} = t + s$ vorgenommen (man beachte, dass nur über s, nicht über t integriert wird) ist. Die gesuchte asymptotische Entwicklung lautet folglich

$$x(t) = t + \varepsilon(\cos t - \cos\left(1 + t\right)) + O\Big(\varepsilon^2\Big).$$