Formal-philosophische Raum-Zeit-Theorien

☞ Konstruktionen aus dem Umfeld der Newtonschen Physik und der speziellen Relativitätstheorie (Minkowski-Geometrien)

☞ Abstraktionen davon: topologische Räume, Mereotopologien

☞ Diskrete Ansätze: (a) Rasterung kontinuierlicher Hintergrundräume, (b) Adjazenz-Graphen.

All diese Ansätze sind „topologielastig“

☞ Egal ob wir es mit einem kontinuierlichen Raum zu tun haben, mit einem topologischen oder diskreten Ansatz: diese Konstruktionen haben immer ein zentrales topologisches Konzept.

Konkrete Geometrien als nicht-topologische Konstruktionen

☞ Wir denken uns einen Raum als aus kleinen Teilchen (beispielsweise Moleküle, Atome oder Elementarteilchen) zusammengesetzt. Diese kleinen Teilchen können entstehen oder verschwinden, sie können durch kleine Teilchen eines anderen Typs ersetzt werden. Beliebige Mengen von kleinen Teilchen sind ihrerseits Objekte dieses „konkreten Raumes".

☞ Eine solche Konstruktion hat keinen topologischen Gesichtspunkt. (Dieses Buch ist ein Objekt aus den und den „kleinen Teilchen", daran ändert sich nichts, wenn ich eine Seite aus dem Buch entferne.)

Ein formales Rahmenwerk für konkrete Geometrien

- Endlichkeit
- Starrheit
- Mehrsortigkeit
- Mereologie
- Free Logic
- Modales Quantifizieren

Die ‚finitistische' Grundsprache $\mathsf{FIN_S}$

☞ Realisiert alle oben genannten Features, mit Ausnahme von modalem Quantifizieren.

Grundlage ist eine endliche Menge von endlichen Mengen S (Mehrsortigkeit, Endlichkeit, Starrheit), aus der die Sortenmenge S' konstruiert wird (Mereologie):

(1) jede Menge aus S ist eine Sorte in S',
(2) ist s eine Sorte, so auch deren Potenzmenge $\wp(s)$.

Nun sei N die Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus S', dann ist eine **Domänensignatur** $D = (S,P)$ definiert als endliche Menge S wie oben plus einer endlichen Teilmenge $P \subseteq N$.

☞ *Sind die Elemente der Sorten dieser Sprache Prädikate oder Individuen?*

$\mathsf{FIN_s}$-**Strukturen**

Eine Struktur $\mathfrak{A}$ bestimmt zunächst für jede Sorte $s \in S'$ eine Teilmenge $\mathfrak{A}(s)$ von ‚existierenden Entitäten' (free logic), wobei für alle $s_1, s_2 \in S'$ das Axiom gelten muss:

$$s_2 = \wp(s_1) \rightarrow \mathfrak{A}(s_2) = \wp(\mathfrak{A}(s_1))$$

Zweitens ordnet $\mathfrak{A}$ jedem $p \in P$ mit $p = s_1, \ldots, s_i$ eine Menge

$$\mathfrak{A}(p) \subseteq \mathfrak{A}(s_1) \times \ldots \times \mathfrak{A}(s_i)$$

zu. Mit $\mathbb{A}$ sei die (endliche!) Menge aller Strukturen (zu einer gegebenen Domänensignatur) bezeichnet.

Die Syntax von $\mathsf{FIN_s}$

Terme: Jedes Element einer Sorte aus S' ist als Konstante definiert, außerdem existiert für jedes $s \in S'$ eine abzählbare Menge von Variablen. Konstanten und Variablen sind Terme. Mit $\Delta(\tau)$ bezeichnen wir die Sorte eines Terms.

Atomare Formeln: Für jedes $p \in P$ mit $p = s_1, \ldots, s_i$ ist genau jede Folge von Termen $\tau_1, \ldots, \tau_i$ mit $\forall j : \Delta(\tau_j) = s_j$ als atomare Formel definiert; wir setzen $\Delta(\tau_1, \ldots, \tau_i) := p$.

Die Syntax der Sprache ist festgelegt durch

$$\phi ::= \phi_{\mathbf{at}} \mid \forall x \phi \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi$$

wobei $\phi_{\mathbf{at}}$ für atomare Formeln steht und x für Variablen.

Die Semantik von FIN_s

Wir definieren die Erfülltheitsrelation $\models_s$, für alle Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ (gegeben eine bestimmte Domänensignatur), alle konstantenbelegten atomaren Formeln ϕ_c, alle Variablen x und alle Formeln ϕ, ψ:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models_s \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \models_s \phi, \\
\mathfrak{A} \models_s \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models_s \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models_s \psi, \\
\mathfrak{A} \models_s \phi_c & \text{gdw} & \phi_c \in \mathfrak{A}(\Delta(\phi_c)), \\
\mathfrak{A} \models_s \forall x \phi & \text{gdw} & \text{für alle } \Delta(x)\text{-Konstanten } c \text{ gilt} \\
 & & \mathfrak{A} \models_s \phi\left[\frac{c}{x}\right].
\end{array}
$$

☞ Diese Sprache ist metalogisch nahezu trivial, da alle Strukturen endlich sind und auch die Menge aller Strukturen endlich ist.

Die modale Logik FLAT_s: Quantifizieren über FIN_s

☞ Anschaulich beschreibt eine Struktur der Grundsprache FIN_s solche Dinge wie „mögliche Welten“, respektive die möglichen *Zustände* eines Universums (zeitlogische Interpretation).

☞ Wir bauen gewissermaßen eine zweite FIN_s-Schicht über FIN_s auf und erhalten die Sprache zweiter Stufe FLAT_s.

Eine **Ontologie** der Sprache FLAT_s

$$\mathfrak{O} = (D, P^*, \mathfrak{M})$$

setzt sich zusammen aus einer FIN_s-Domänensignatur $D = (S, P)$ (die erste Stufe), einer Menge P^* und einer **modalen Struktur** $\mathfrak{M}$.

P^* und $\mathfrak{M}$

S^* enthalte die Menge aller Sorten aus S, die Menge $\mathbb{A}$ aller D-Strukturen, sowie für jede Sorte s deren Potenzmenge $\wp(s)$. Mit N^* bezeichnen wir die Menge aller endlichen Folgen von Elementen von S^*. P^* ist eine Teilmenge von N^*, sodass zusätzlich gilt:

$$P^* \cap P = \emptyset.$$

Die modale Struktur $\mathfrak{M}$ ist dann definiert als Abbildung, die jedem $p \in P^*$ mit $p = s_1, \ldots, s_i$ eine Menge

$$\mathfrak{M}(p) \subseteq s_1 \times \ldots \times s_i$$

zuordnet (FLAT_s ist nicht als *free logic* definiert).

Die Syntax von $\mathsf{FLAT_s}$

Analog zu der Grundsprache $\mathsf{FIN_s}$ sind auch hier Terme definiert, sowie die Abbildung Δ, die jedem Term seine Sorte zuordnet. Es existiert jedoch eine zusätzliche Konstante SELF für die Sorte $\mathbb{A}$ aller D-Strukturen. Für jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ und jede $\mathbb{A}$-Konstante $a \neq \mathsf{SELF}$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(a) &:= a, \\ \mathfrak{A}(\mathsf{SELF}) &:= \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Atomare Formeln werden analog wie in $\mathsf{FIN_s}$ definiert. Die Syntax von $\mathsf{FLAT_s}$ ist dann folgendermaßen festgelegt:

$$\phi ::= \ \phi_{\mathbf{at}} \mid \forall x \phi \mid \neg \phi \mid \phi \wedge \phi \mid \tau_a \Vdash \phi.$$

Dabei steht $\phi_{\mathbf{at}}$ für atomare Formeln, x für Variablen, τ_a für $\mathbb{A}$-Terme und $\Vdash$ ist ein arbiträres Symbol, die sogenannte **flache Modellbeziehung**.

Die Semantik von $\mathsf{FLAT_s}$

Gegeben eine Ontologie, die eine bestimmte modale Struktur $\mathfrak{M}$ festsetzt, muss Erfülltheit hier nur relativ zu Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ definiert werden:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models \neg\phi & \text{gdw} & \text{nicht } \mathfrak{A} \models \phi, \\
\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi & \text{gdw} & \mathfrak{A} \models \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi, \\
\mathfrak{A} \models \phi_c & \text{gdw} & \phi_c \in \mathfrak{A}(\Delta(\phi_c)), \\
\mathfrak{A} \models \phi_c^* & \text{gdw} & \phi_c^* \in \mathfrak{M}(\Delta(\phi_c^*)), \\
\mathfrak{A} \models \forall x\phi & \text{gdw} & \text{für alle } \Delta(x)\text{-Konstanten } c \text{ gilt} \\
 & & \mathfrak{A} \models \phi\left[\frac{c}{x}\right], \\
\mathfrak{A} \models a \Vdash \phi & \text{gdw} & \mathfrak{A}(a) \models \phi.
\end{array}
$$

Modale Operatoren können dann sofort definiert werden. Beispiel:

$$\Box\phi \quad \text{gdw} \quad \forall x_a : (R, \mathsf{SELF}, x_a) \rightarrow x_a \Vdash \phi.$$

Hier ist x_a eine $\mathbb{A}$-Variable und R eine passende ‚Erreichbarkeitsrelation‘.

Zeitliche Gesichtspunkte

☞ Da alle Sorten der Sprachen FIN_s und FLAT_s endliche Mengen sind, können in diesem Umfeld nur diskrete Zeitdarstellungen vorgenommen werden.

Eine **zeitliche Struktur** $(\mathfrak{Z}, <)$ für eine FLAT_s-Ontologie $\mathfrak{O}$ ist definiert als eine Menge von Strukturen $\mathfrak{Z} \subseteq \mathbb{A}$ (die ‚möglichen Zeitpunkte' des Universums) plus einer darüber definierten Relation $<$.

Setzt man $<$ als lineare Ordnung an, so ergeben sich die üblichen Definitionen:

$$
\begin{array}{ll}
F\phi & \exists z : \mathsf{SELF} < z \wedge z \Vdash \phi \\
G\phi & \neg F \neg \phi \\
U(\phi, \psi) & \exists z : \mathsf{SELF} < z \wedge z \Vdash \phi \wedge \\
 & \quad \forall z' : \mathsf{SELF} < z' < z \rightarrow z' \Vdash \psi
\end{array}
$$

usw.

Analoge Definitionen sind möglich, wenn $<$ als partielle Ordnung definiert ist (es resultieren modal-zeitliche Konstruktionen).

Konkrete Räume

☞ Gegeben eine Menge M von kleinen Teilchen (**Monaden**) ist der konkrete Raum $\mathfrak{R}$ darüber definiert als Potenzmenge $\wp(M) =: \mathfrak{R}$.

Ein Zustand eines Universums wird dann stets durch eine passende Teilmenge $M_\exists$ von dort existierenden kleinen Teilchen plus die entsprechenden Menge $\mathfrak{R}_\exists = \wp(M_\exists)$ charakterisiert.

Mit $\sqsubset$ bezeichnen wir die Verbandsordnung $\mathfrak{R}$, bzw. $\mathfrak{R}_\exists$, die als Teilmengenrelation über M, bzw. $M_\exists$ definiert ist.

☞ Diese Ordnung $\sqsubset$ spiegelt die Ansprüche einer **Mereologie** wider, da sie nicht nur eine partielle Ordnung darstellt, sondern auch solche Dinge wie mereologische Summe (Supremum) und mererologisches Produkt (Infimum) eindeutig definiert sind.

Grundproblematik einer konkreten Geometrie

Wie kann man eine derartige (diskrete) Raum-Vorstellung mit einer zeitlichen Strukturierung verknüpfen?

Ein Beispiel: ein Blatt Papier könnte in einem bestimmten Zustand unseres Universums aus irgendwelchen ‚Papier-Molekülen‘ (aus M) zusammengesetzt sein. Verbrennt das Blatt, so müsste man diese Moleküle in den Folgezuständen durch entsprechende ‚Asche-Moleküle‘ (aus M) ersetzen.

Diskrete Raum-Zeit-Strukturen $\mathfrak{R}_{\mathfrak{z}} = (\mathfrak{Z}, <, M, \rho)$

$(\mathfrak{Z}, <)$ ist eine zeitliche Struktur im oben definierten Sinn. (Basis ist weiterhin durchgängig eine $\mathsf{FLAT_s}$-Ontologie $\mathfrak{O}$.)

M ist eine Menge von Monaden, über der ein konkreter Raum $\mathfrak{R} = \wp(M)$ definiert ist. M ist außerdem als Sorte aus S definiert, d.h. für jeden Zustand $z \in \mathfrak{Z}$ ist eine Teilmenge $M_\exists = z(M)$ von dort existierenden Monaden definiert, sowie die entsprechende Menge $\mathfrak{R}_\exists = \wp(M_\exists)$.

ρ bildet für je zwei in $<$ *benachbarte* Zustände $z, z' \in \mathfrak{Z}$ deren Teilräume $z(\mathfrak{R})$ und $z'(\mathfrak{R})$ bijektiv aufeinander ab. – So können beispielsweise die Papier-Moleküle den nachfolgenden Asche-Molekülen zugeordnet werden.

☞ Nur durch die Abbildung ρ kann eine konkrete Geometrie in nichttrivialer Weise funktionieren.

Resümee

☞ Konkrete Geometrien sind das Resultat eines konsequent durchgezogenen diskreten Gesichtspunktes. Das ist gleichbedeutend mit ihrer Eigenschaft, topologisch (zunächst) indifferent zu sein.

☞ Konkrete Geometrien sind wichtige Anwendungsbeispiele eines bestimmten Typs von ‚finitistischen Sprachen', deren Ontologie auf den Prinzipien Endlichkeit und Starrheit beruht.

☞ Anwendungsperspektiven: überall dort, wo ‚objektorientierte' Gesichtspunkte im Zentrum stehen, respektive wichtiger sind als quantitativ-metrische Gesichtspunkte.

☞ Zweifellos können jedoch auch quantitativ-metrische und topologische Gesichtspunkte in einem solchen Umfeld implementiert werden, wenn auch erst in der Gestalt von Merkmalen sekundärer Natur.